<36635622030017

<36635622030017

Bayer. Staatsbibliothek

3651 Bibl. Mont -2

Lehrbuch
der
Arithmetik
zum
Gebrauche in den Schulen
und
zum Selbstunterrichte,

von
Johann von Gott Bundschue,
Professor der Mathematik und der Naturwissenschaften an dem königlich baierischen Gymnasium zu Kempten.

Zweyter Theil,
welcher die gemeinen Brüche, und die Auflösung der Aufgaben der so genannten Regeldetri enthält.

Kempten, 1813.
gedruckt und im Verlag bey Dannheimer.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Der zweyte Theil des gegenwärtigen Lehrbuches der Arithmetik enthält die gemeinen Brüche, die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse und Proportionen, wie auch die Auflösung der Aufgaben der so genannten Regeldetri.

Weil eine richtige und vollständige Kenntniß dieser Brüche, um die vorkommenden Rechnungsaufgaben, namentlich die der Regeldetri, auflösen zu können, unerläßlich nothwendig ist, und dieselben zugleich die Grundlage für jene Veränderungen bilden, welche bey den Brüchen in der Buchstabenrechnung, wie auch bey den Decimal- und Sexagesimalbrüchen vorzunehmen sind, so legte ich auch auf den Vortrag derselben ein vorzügliches Gewicht.

Es kommen dabey viele Regeln, und viele Auflösungen von Aufgaben vor; der Schüler muß sie aber alle ohne Ausnahme wissen, wenn er anders Fortschritte machen, und in den Stand versetzt werden soll, alle Beyspiele, die ihm vorgelegt werden, richtig behandeln zu können. Der im §. 20. vorkommenden wichtigen Aufgabe, die Brüche durch Annäherung zu verkleinern, schickte ich ein kleineres Beyspiel voraus, und ließ dann aus dem Grunde ein größeres folgen, weil dieselbe, was ich auf Seite 48. bey Nro. 5. ausdrücklich bemerke, eben bey solchen Brüchen, derer Zähler und Nen-

ner sehr große Zahlen sind, von anerkannten Vortheilen ist.

Auf dieser nämlichen Seite findet man auch, worauf ich den Lehrer gleich jetzt aufmerksam machen muß, in Betreff aller Aufgaben die Bemerkung, man solle die Schüler die gegebenen Regeln gleich Schritt vor Schritt in den zu diesem Behufe denselben beygefügten, und ausgearbeiteten Beyspielen anwenden lassen, um ihnen auf diese Weise die Sache nach und nach anschaulich und verständlich zu machen.

Ich habe mich über den Zweck, den ich bey Verfassung dieses Werkes hatte, in der Vorrede des I. Theiles schon zureichend erklärt; es bedarf also hier keiner Rechtfertigung mehr, warum ich auch die Lehre von den Brüchen so ausführlich und vollständig darstelle, wie man sie im I. Hauptstücke des gegenwärtigen Theiles vorgetragen findet.

Bey den Aufgaben der Regeldetri ist immerhin von Verhältnissen, und Proportionen die Rede, da die Auflösung derselben in der Proportionslehre ihren Grund hat, und aus dieser die aufgestellten Regeln entwickelt und abgeleitet werden; um deswillen suchte ich auch, in so ferne es ohne die Buchstabenrechnung geschehen konnte, die Schüler mit den Eigenschaften der arithmetischen sowohl, als auch geometrischen Proportionen, und mit jenen Auflösungen bekannt zu machen, wo die Gestalt der Proportion beybehalten wird.

Jede Aufgabe, welche zur Regeldetri gehört, läßt sich auf einen jener 5 Fälle zurückführen, die ich im II. Hauptst. II. Abschn. bey Nro. II. für alle möglichen Regeldetri-Aufgaben darstelle; da aber die Anwendung der dabey aufgestellten Regeln

auf die mannigfaltigste Weise geschehen kann, so führe ich nur die vorzüglichsten, im gemeinen Leben immerhin vorkommenden Aufgaben an. Weiß nun der Schüler alle die verschiedenen Aufgaben, die ich in diesem Theile namentlich berühre, aufzulösen, und hat er es da zur gehörigen Fertigkeit gebracht, so wird man ihm nicht leicht eine Regeldetri-Aufgabe vorlegen können, die er nicht sollte aufzulösen im Stande seyn.

Was die Gründe des Verfahrens betrifft, die ich dem vorliegenden Zwecke gemäß bey den gegebenen Auflösungen der zur Regeldetri gehörigen Aufgaben nicht anführen konnte, so verweise ich diejenigen, welche mit den Elementen der Buchstabenrechnung vertraut sind, auf die von mir im vorigen Jahre herausgegebene Anleitung zur Begründung und Anwendung des Reesischen Ansatzes; hier findet man in Betreff der erwähnten Aufgaben die nämlichen Regeln, welche in diesem zweyten Theile vorkommen, während da zugleich ihre Richtigkeit und allgemeine Giltigkeit mittels der bey den Gleichungen, und Proportionen aufgestellten Lehrsätze erwiesen ist.

Die Rezension, die über diese Schrift im Monat Februar 1813 im literarischen Verkündiger Nro. 6. erschienen ist, ließ ich ganz unverändert abdrucken, und fügte dann am Ende dieses Theiles meine Antwort darauf bey, um dadurch den Leser in den Stand zu versetzen, die Sache gehörig beurtheilen zu können.

Ich bekleide gegenwärtig eine öffentliche mathematische Lehrstelle, und gebe zugleich dieses Werk heraus, das als Lehrbuch beym mathematischen Unterrichte an der dießortigen königl. baier. Studien-

schule eingeführt worden ist, und wo ich den Reesischen Ansatz ganz wieder nach den nämlichen Ansichten vortrage, wie ich es voriges Jahr in der erwähnten Anleitung that; ich bin also dem Publicum diese Rechtfertigung schuldig, und muß, weil ich öffentlich angegriffen wurde, auch öffentlich zeigen, daß ich bey Verfassung meiner Schriften keineswegs so unwissend und so oberflächlich zu Werke gehe, wie man es mir gerne zur Last legen möchte.

Im II. Theile dieses Werkes werden die im I. Theile, und im III. Theile die in den beiden ersten Theilen vorkommenden §§. häufig citirt; ich habe deßwegen die Sache abgekürzt, und z. B. (I. §. 48.), oder (II. §. 20.) geschrieben, anstatt daß ich mich ausgedrückt hätte „man sehe im I. Theile den §. 48“ oder „man sehe im II. Theile den §. 20.“

Nebst denjenigen Werken, die ich schon im ersten Theile namentlich aufführte, benützte ich auch in Absicht auf die in diesem II. Theile vorkommenden Zweige sowohl die mathematischen Schriften von Zallinger, Clemm, Spengler, Fridl, Angerer, und Schmalzried, als auch die vortreffliche Anleitung zur Reesischen Rechnung des königl. württemb. Hrn. Ober-Regierungs-Rathes C. L. Schübler.

Kempten den 25. July 1813.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Hauptstück.

Von den gemeinen Brüchen, oder von den Brüchen überhaupt.

I. Abschnitt.

Vorläufige Erklärungen, Lehrsätze, und Aufgaben — als Einleitung zu den vier Rechnungsarten mit Brüchen überhaupt.

I. Erklärungen . . Seite 1. §. 1. bis §. 4.
II. Lehrsätze . . . — 8. §. 5. — §. 7.
III. Aufgaben:
A) Ganze in Brüche zu verwandeln . . Seite 15. §. 8.
B) Brüche in andere Brüche zu verwandeln — 16. §. 9.
Erklärungen in Absicht auf die Verkleinerung der Brüche. S. 18. §. 10.
Regeln rücksichtlich der Verkleinerung der Brüche. S. 19. §. 11.
C) Aufgabe, zu zwey ganzen Zahlen das größte gemeine Maaß zu finden . . . Seite 20. §. 12.
D) Brüche zu verkleinern . . . — 22. §. 13.
E) Brüche auf Einheiten niederer Ordnung zu reduciren S. 24. §. 14.
F) Brüche auf Einheiten höherer Ordnung zu reduciren S. 25. §. 15.
G) Die kleinste Zahl zu finden, die durch alle Nenner der gegebenen Brüche theilbar ist . . S. 26. §. 16.
H) Mehrere Brüche in andere Brüche von einem gegebenen allgemeinen Nenner zu verwandeln. S. 29. §. 17.
I) Zwey oder mehrere Brüche unter einerley Benennung zu bringen . . . . S. 31. §. 18.
K) Bey mehreren Brüchen zu bestimmen, welcher dem Werthe nach der größte oder kleinste Bruch ist S. 36. §. 19.
L) Brüche durch Annäherung zu verkleinern S. 37. §. 20.
Die Probe, diese Aufgaben betreffend, wie auch die Wiederholung in Fragen, und Beyspiele S. 48. §. 21 — §. 23.

II. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit gemeinen Brüchen.

I. Die Addition der gemeinen Brüche S. 55. §. 24. — §. 27.
Die Einrichtung der Brüche . . S. 61. §. 28.
II. Die Subtraction dieser Brüche S. 63. §. 29. — §. 32.
III. Die Multiplication derselben S. 69. §. 33. — §. 38.
IV. Die Division solcher Brüche S. 77. §. 39. — §. 41.
Die Verwandlung der zusammengesetzten Brüche in einfache . . . . S. 81. §. 42.
Die Probe bey den vier Rechnungsarten mit solchen Brüchen . . . S. 83. §. 43.
Bemerkung, diese vier Rechnungsarten betreffend, wie auch die Wiederholung und Beyspiele S. 84. §. 44. — 46.

II. Hauptstück.

Anwendung der vier Rechnungsarten mit ganzen, und gebrochenen Zahlen auf die Aufgaben der so genannten Regeldetri.

I. Abschnitt.

Erklärungen, Lehnsätze und Aufgaben als Einleitung.

Von den arithmetischen, und geometrischen Verhältnissen . . . S. 90. §. 47. — §. 50.
Von den arithmetischen, und geometrischen Proportionen . . . S. 98. §. 51. — §. 56.
Bestimmung, in welchem Verhältnisse zwey Dinge zu einander stehen . . S. 108. §. 57. — §. 60.
Aufgabe, zu 3 gegebenen benannten Zahlen die vierte zu finden . . . S. 112. §. 61. — §. 62.
Wiederholung in Fragen, und Beyspiele S. 121. §. 63. — §. 64.

II. Abschnitt.

Die Auflösung der verschiedenen Aufgaben der Regeldetri.

I. Einige Erklärungen und Aufgaben in Absicht auf den Reesischen Ansatz . S. 125. §. 65. — §. 73.
II. Die Auflösung der Aufgaben
A) Der einfachen geraden Regeldetri . . S. 138. §. 74.
B) Der einfachen verkehrten Regeldetri . S. 143. §. 75.
C) Der zusammengesetzten geraden Regeldetri S. 148. §. 76.
D) Der zusammengesetzten verkehrten Regeldetri S. 153. §. 77.
E) Der zusammengesetzten geraden und verkehrten Regeldetri zugleich . . . . . S. 157. §. 78.
III. Aufgaben, wo die Reductionen niederer Einheiten auf höhere, und umgekehrt, vorkommen S. 163. §. 79. — §. 82.
Wiederholung und Beyspiele S. 171. §. 83. — §. 84.

III. Abschnitt.

Anwendung der aufgestellten Regeln auf verschiedene im gemeinen Leben vorkommende Rechnungsfälle.

I. Die Gesellschafts-Regel . S. 175. §. 85. — §. 88.
II. Die Vermischungs-Regel . . S. 181. §. 89.
III. Die Steuer-Rechnungen . . S. 184. §. 90.
IV. Die Brandassecuranz-Rechnungen . S. 187. §. 91.
V. Die Alligations-Regel . S. 190. §. 92. — §. 94.
VI. Die Reductionen verschiedener Maaße, Gewichte, und Münzen . . S. 196. §. 95. — §. 97.
VII. Die Zeit- und Rabattrechnung S. 205. §. 98. — §. 99.
VIII. Die Tausch- und Zehentrechnung, wie auch die Theilungsrechnung und die Regula Falsi S. 210. §. 100. — §. 103.
Wiederholung und Beyspiele zur Uebung S. 213. §. 103. — §. 104.

I. Hauptstück.

Von den gemeinen Brüchen, oder von den Brüchen überhaupt.

I. Abschnitt.

Vorläufige Erklärungen, Lehrsätze, und Aufgaben — als Einleitung zu den vier Rechnungsarten mit Brüchen überhaupt.

I.
Erklärungen.

§. 1.

Gebrochene Zahl — Bruch.

Eine gebrochene Zahl, oder wie man sich kürzer ausdrückt, ein Bruch ist diejenige Größe, welche einen Theil, oder mehrere Theile eines Ganzen in Beziehung auf dasselbe ausdrückt, wie dieses schon im §. 4. des I. Theiles (I. §. 4.) bemerkt wurde.

Zwey Stücke machen demnach die wesentlichen Merkmale des Bruches — der gebrochenen Zahl aus, welche darin bestehen, daß

Erstens, Theile von einer andern Größe — von einem Ganzen ausgedrückt, und

Zweytens, diese zugleich als Theile des Ganzen — in Vergleichung mit dem Ganzen dargestellt werden.

Wenn ich nun z. B. sage, „drey vierte Theile eines Guldens," so drücke ich dadurch einen Bruch —

eine gebrochene Zahl aus, weil ich hier einige Theile des Guldens — einige Theile eines Ganzen, und diese zugleich in Vergleichung — im Verhältnisse zu dem Ganzen ausdrücke.

Im Gegentheile aber ist nicht die Rede von einem Bruche, wenn ich bloß sage „3 Gulden, oder 1 Kreutzer," indem ich im ersten Falle den ganzen Gulden selbst, und also nicht Theile desselben, mehrmal setze, und im zweyten Falle der Kreutzer, welcher allerdings der sechszigste Theil des Guldens ist, als ein für sich bestehendes Ganzes, und somit nicht als ein Theil eines andern Ganzen dargestellt wird.

Die Benennung „Bruch — gebrochene Zahl (Fractio)" — kömmt von dem Ausdrucke „brechen (frango)" her; weil nämlich gewiße körperliche Gegenstände, wenn man sie zerbricht, in mehrere Theile getheilt werden.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß bey ganzen Zahlen das Ganze, oder die Einheit selbst, hingegen aber bey gebrochenen Zahlen — bey Brüchen nur ein gewißer Theil des Ganzen, oder der Einheit ein- oder mehrmal genommen wird.

§. 2.

Nenner, Zähler, und Bezeichnungsweise der Brüche.

Weil die Brüche Theile von den Ganzen ausdrücken (§. 1.), und sie somit bestimmt angeben, was für Theile von dem Ganzen, und wie oft dieselben genommen werden müssen, so sind zur Bezeichnung derselben, um sie nicht immer mit Worten schreiben zu müssen, zwey Zahlen unumgänglich nothwendig, die, wenn sie auch der Kürze wegen nicht immer geschrieben werden, indem man mittels gewißer Zeichen manchmal die eine aus der andern erkennen kann, im Grunde doch jederzeit vorhanden seyn müssen.

a) Diejenige von diesen beiden Zahlen, welche angiebt, was für Theile von dem Ganzen vorhanden sind, und somit die Beschaffenheit (Qualität vom latein. Substantiv „Qualitas") der vorkommenden

Theile bestimmt, heißt man Nenner (Denominator) des Bruches; — dieser benennt die Theile — giebt ihnen einen bestimmten Namen, und drückt z. B. aus, ob in dem gegebenen Bruche dritte, vierte, fünfte rc. Theile, oder kürzer, ob Drittel, Viertel, Fünftel rc. vorkommen.

b) Hingegen aber jene der beiden erwähnten Zahlen, welche anzeigt, wie oft der durch den Nenner bestimmte Theil zu nehmen ist, heißt man Zähler (Numerator) des Bruches; — dieser zählt gleichsam die Anzahl — die Menge der vorhandenen Theile, und bestimmt dadurch die Quantität (Quantitas) derselben.

c) Bey Bezeichnung der Brüche schreibt man zuerst den Zähler, zieht dann einen Querstrich — eine horizontale Linie (—), und schreibt dann unten den Nenner hin.

Auf diese Weise wird z. B. der Bruch „drey vierte Theile eines Guldens“ so geschrieben „$\frac{3}{4}$ fl.“, und der Kürze wegen gelesen „drey Viertel eines Guldens.“

In diesem Beyspiele ist die Zahl 4 der Nenner, die Zahl 3 der Zähler, weil jene ausdrückt, daß hier vierte Theile, oder Viertel vorkommen, diese hingegen anzeigt, daß der vierte Theil des Guldens 3mal zu nehmen sey, und die zwischen dem Zähler und Nenner gezogene horizontale Linie — der Querstrich (—) ist das Bruchzeichen.

Man schreibt auch manchmal die Brüche mit diesem Zeichen (/); z. B. 5/6, 7/8, welches dann, wie das vorige Bruchzeichen gelesen wird, nämlich „fünf sechste Theile, sieben achte Theile, oder kürzer, fünf Sechstel, sieben Achtel eines Ganzen.“

I. Zusatz: Der Bruch $\frac{3}{4}$ fl. zeigt dem Gesagten gemäß an, daß man den 4ten Theil des Guldens 3mal nehmen soll.

Um nun dieses zu erhalten, muß man den Gulden in vier gleiche Theile theilen, und davon einen Theil — somit den vierten Theil nehmen, welcher dann kraft des Zählers 3mal zu setzen ist. Weil der Gulden 60 kr. hat,

so beträgt der 4te Theil desselben, wenn man nämlich 60 kr. mit 4 dividirt, 15 kr., und diese 3mal genommen, oder mit 3 multiplicirt, geben 45 kr. (I. §. 45.); oder $\frac{3}{4}$ fl. = (1 fl. : 4) X 3 = (60 kr. : 4) X 3 = 15 kr. X 3 = 45 kr.; indem man anstatt des Gleichen Gleiches (I. §. 10. Nro. 10.), folglich anstatt 1 fl. — 60 kr., da 1 fl. = 60 kr. ist, setzen kann.

II. Zusatz: Der Bruch $\frac{3}{4}$, bey welchem das Ganze nicht ausdrücklich benannt ist, drückt überhaupt drey vierte Theile, oder 3 Viertel eines Ganzen, und somit in Gemäßheit des vorigen Zusatzes (§. 2. Zus. I.) eben so viel aus: als es soll von einem Ganzen der vierte Theil 3mal genommen werden, oder $\frac{3}{4}$ = (1 : 4) X 3, indem das Ganze, welches als eine Einheit höherer Art genommen wird (I. §. 3.) durch 1 ausgedrückt werden kann.

§. 3.

Eintheilung der Brüche in ächte, und unächte, ferner in einfache, und zusammengesetzte Brüche.

Theilet man ein Ganzes z. B. einen Gulden in mehrere gleiche Theile, und nimmt man somit von dem Ganzen einen bestimmten Theil, so kann dieser so oft gesetzt, oder gedacht werden, als man nur immer will, indem man ihn, wie jede andere benannte Zahl, mit jeder beliebigen Zahl multipliciren kann.

Um deswillen kann ein Bruch seinem Werthe nach weniger, oder aber eben soviel, oder mehr als das Ganze selbst betragen, je nachdem nämlich der Zähler anzeigt, daß wenigere, oder aber eben so viele, oder mehrere Theile zu nehmen sind, als erfordert werden, daß sie zusammen das Ganze ausmachen; woraus nun die Eintheilung in ächte und unächte — eigentliche und uneigentliche Brüche hervorgeht.

a) Ein ächter — eigentlicher Bruch (Fractio vera — genuina) heißt derjenige Bruch, der kleiner ist, als jenes Ganze, von welchem durch denselben gewiße Theile ausgedrückt werden, bey dem somit

nicht so viele Theile genommen werden, daß sie zusammen das Ganze geben.

b) **Ein unächter — uneigentlicher Bruch** (Fractio spuria) heißt derjenige Bruch, der seinem Werthe nach so groß, oder noch größer ist, als jenes Ganze, von dem durch denselben gewiße Theile ausgedrückt werden, bey welchem folglich kraft des Zählers der durch den Nenner bestimmte Theil so oft genommen wird, daß man so viel, oder noch mehr, als das Ganze erhält.

Um denjenigen Theil zu bekommen, den man dem vorhandenen Nenner gemäß nehmen muß, ist das Ganze mit dem Nenner zu dividiren, um es in so viele gleiche Theile zu theilen, als es der Nenner anzeigt (§. 2. Zus. I.). Ferner alle Theile zusammen geben das Ganze wieder (I. §. 10. Nro. 2.); wenn demnach z. B. ein Gulden in 4 gleiche Theile getheilt wird, so geben diese zusammen wieder den ganzen Gulden, oder $\frac{1}{4}$ fl. = $\frac{1}{4}$ 60 kr. = 15 kr., und 15 kr. X 4 = 60 kr. = 1 fl.; indem $\frac{1\text{ fl.}}{4} = \frac{1}{4}\text{ fl.} = \frac{60\text{ kr.}}{4} = 15$ kr. und 15 kr. † 15 kr. † 15 kr. † 15 kr. = 60 kr. = 1 fl.

Deßwegen ist beym ächten Bruche der Zähler allezeit kleiner, und beym unächten der Zähler immerhin eben so groß, oder noch größer, als der Nenner, und dieses aus dem einfachen Grunde, weil beym ächten Bruche das Ganze in mehrere gleiche Theile getheilt wird, als der Zähler Einheiten hat, und also da wenigere solche Theile genommen werden, als daß sie ein Ganzes geben würden, welches letztere in so viele gleiche Theile getheilt wird, als der Nenner Einheiten hat. Im Gegentheile aber beym unächten Bruche, der soviel, oder mehr als ein Ganzes ist, muß der durch den Nenner bestimmte Theil eben so oft, oder öfters genommen werden, als der Nenner Einheiten hat; das Ganze wird aber immerhin in so viele gleiche Theile getheilt, als es der Nenner anzeigt, also muß hier der Zähler so groß, oder noch größer, als der Nenner seyn.

Daher werden die **ächten Brüche** auch jene

Brüche genannt, bey welchen der Zähler kleiner ist, als der Nenner; unächte Brüche hingegen werden jene genannt, bey denen der Zähler so groß, oder noch größer, als der Nenner ist; z. B. $\frac{3}{4}$ ist ein ächter Bruch, dagegen aber $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{4}$ sind unächte Brüche, weil beym ersten Bruche der Zähler 3 kleiner ist als der Nenner 4, welches bey den beiden letzten Brüchen der Fall nicht ist.

c) Einfache Brüche heißt man diejenigen, bey welchen sowohl Zähler als Nenner ganze Zahlen sind.

d) Zusammengesetzte Brüche hingegen sind jene, bey welchen der Zähler, oder der Nenner, oder beyde zugleich ebenfalls Brüche — gebrochene Zahlen sind; z. B. $\frac{3}{4}$ ist ein einfacher Bruch, weil der Zähler 3, und der Nenner 4 ganze Zahlen sind; hingegen aber $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, oder $\frac{4}{\frac{2}{3}}$, oder endlich $\frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{8}}$ sind zusammengesetzte Brüche, weil die Zähler $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$, und die Nenner $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ ebenfalls Brüche sind.

Es ist immerhin nur von einfachen Brüchen die Rede, weil die zusammengesetzten bey den Berechnungen zu unbequem wären, und man durch gewiße Veränderungen jeden zusammengesetzten Bruch, ohne seinen Werth zu verändern, in einen einfachen verwandeln kann.

§. 4.

Eintheilung der Brüche in gemeine, Decimal-, und Sexagesimal-Brüche.

a) Brüche, bey welchen der Nenner wie immer beschaffen seyn kann, und somit nicht eine bestimmte Zahl, oder ein Product der nämlichen mehrmal als Factor gesetzten Größe seyn muß, heißt man gemeine Brüche, allgemeine Brüche, oder Brüche überhaupt.

b) Decimalbrüche heißt man diejenigen, die zum Nenner immerhin 1 mit angehängten Nullen haben, bey denen also der Nenner allezeit 10, oder ein solches Product ist, das man erhält, wenn man 10

mehrmal mit sich selbst multiplicirt, und somit diese Zahl mehrmal als Factor setzt.

c) Sexagesimalbrüche sind solche, bey welchen der Nenner die Zahl 60, oder aber ein solches Product ist, das man erhält, wenn man 60 mehrmal als Factor setzt — mehrmal mit sich selbst multiplicirt.

Die Brüche z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{7}{60}$ sind gemeine — allgemeine Brüche, wenn man auf die Beschaffenheit des Nenners keine Rücksicht nimmt; sieht man aber bestimmt darauf, daß im zweyten Bruche der Nenner 10, und im dritten der Nenner 60 ist, so wird der zweyte ein Decimal-, und der dritte ein Sexagesimalbruch genannt, während dann nur mehr der erste Bruch $\frac{3}{4}$ die Benennung eines gemeinen Bruches beybehält.

Nur von den gemeinen, oder allgemeinen Brüchen — den Brüchen überhaupt — ist hier die Rede; die Decimal-, und Sexagesimalbrüche werden im folgenden III. Theile dieses Lehrbuches vorgetragen werden.

I. Zusatz: Die Decimal-, und Sexagesimalbrüche sind eigentlich nur besondere Arten von Brüchen, und im Grunde immerhin auch gemeine Brüche, wenn auch ihre Nenner, wovon in der Folge die Rede seyn wird, nicht ausdrücklich geschrieben werden.

II. Zusatz: Aber nicht umgekehrt ist zugleich auch jeder gemeine Bruch ein Decimal-, oder Sexagesimal-Bruch, weil bey jenem der Nenner jede beliebige Zahl seyn kann, welches bey den letztern Brüchen keineswegs der Fall ist.

III. Zusatz: Was von den gemeinen, oder allgemeinen Brüchen — von den Brüchen überhaupt gesagt, und erwiesen wird, gilt auch von den Decimal-, und Sexagesimal-Brüchen, weil diese letztern unter jenen schon enthalten sind.

II.

Lehrsätze.

§. 5.

I. Lehrsatz:

Bey jedem Bruche kann der Zähler als Dividend, der Nenner als Divisor, und der Bruch selbst als Quotient betrachtet werden.

Beweis:

1) Nach dem von dem Bruche aufgestellten Begriffe (§. 1.) muß das Ganze mit dem Nenner dividirt, und dann der Quotient mit dem Zähler multiplicirt werden, welches im II. Zusatze des §. 2. ausführlich erläutert wurde; weßwegen z. B. $\frac{3}{4} = (1:4) \times 3$.

2) Der Quotient „1:4" wird mit 3 multiplicirt, wenn man den Dividend 1 mit 3 multiplicirt, und das Product wieder mit 4 dividirt; weil dadurch der 3mal größere Dividend, da der Divisor unverändert bleibt, 3mal größere Theile giebt; der Quotient ist dadurch 3mal größer geworden, und eben deswegen mit 3 multiplicirt worden; oder $(1:4) \times 3 = 3:4$.

3) Zwey Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich (I. §. 10. Nro. 4.), daher ist auch $\frac{3}{4} = 3:4$; oder

$$\frac{3}{4} = (1:4) \times 3$$
$$(1:4) \times 3 = 3:4$$

also ist $\frac{3}{4} = 3:4$

I. Zusatz: Es ist gleich viel, ob man zwischen dem Zähler und Nenner das Divisionszeichen, oder das Bruchzeichen setzt, ob man z. B. schreibt $\frac{3}{4}$, und liest „drey Viertel", oder aber ob man schreibt „3:4", und liest „3 dividirt durch 4."

Aus diesem Grunde habe ich im I. Theile §. 61. e. das Bruchzeichen zugleich auch als Divisionszeichen angenommen.

Will man demnach bloß den Quotienten ausdrücken, den man erhält, wenn man eine Zahl durch die

andere dividirt, so kann man zur Bezeichnung der Division das Divisionszeichen (:), oder aber das Bruchzeichen (—) wählen. — Will man aber bestimmt die Gestalt eines Bruches d. h. einen Bruch, und also nicht bloß überhaupt den Werth desselben ausdrücken, wie dieses z. B. der Fall ist, wenn man ganze Zahlen in Brüche verwandelt, so muß auch bestimmt das Bruchzeichen genommen werden; indem nur durch Hülfe dieses Zeichens (§. 2. c.) die Zahlen bruchartig d. h. in der Gestalt — Form der Brüche dargestellt werden können.

II. Zusatz: Wenn zwey, oder mehrere Brüche Theile eines, und des nämlichen Ganzen ausdrücken, so ist

a) bey gleichen Nennern jener Bruch der größere, der den größern Zähler hat; z. B. $\frac{3}{4}$ fl. > $\frac{2}{4}$ fl.;

b) bey gleichen Zählern ist jener Bruch der größere, welcher den kleinern Nenner hat; z. B. $\frac{3}{2}$ fl. > $\frac{3}{4}$ fl.; und

c) bey ungleichen Zählern und Nennern ist jener Bruch der größere, der den größern Zähler, und den kleinern Nenner hat, z. B. $\frac{6}{2}$ fl. > $\frac{3}{4}$ fl.

Im ersten Falle bey a wird der vierte Theil des nämlichen Ganzen im ersten Bruche 3mal, und im zweyten Bruche nur 2mal genommen, daher muß auch der erste Bruch größer seyn (§. 2. a und b), oder

$$\begin{array}{c} 3 > 2 \\ 4 = 4 \\ \hline \end{array}$$

also ist $3 : 4 > 2 : 4$, d. h. $\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$ (I. §. 62. III.).

Im zweyten Falle bey b wird dem Nenner des ersten Bruches gemäß das Ganze in 2, und nach dem Nenner des zweyten das nämliche Ganze in 4 gleiche Theile getheilt, um den 2ten, und 4ten Theil des Ganzen zu erhalten.

In je weniger gleiche Theile das nämliche Ganze getheilt wird, desto größer werden dieselben; folglich ist der zweyte Theil größer, als der vierte Theil.

Kraft der Zähler werden diese Theile in beiden

Brüchen gleich oft genommen, um deswillen ist der erste Bruch größer, als der zweyte, oder

$$\begin{array}{l} 3 = 3 \\ 2 < 4 \\ \hline 3:2 > 3:4 \end{array}$$

also ist $3:2 > 3:4$, d. h. $\frac{3}{2} > \frac{3}{4}$ (I. §. 62. II.).

Endlich im dritten Falle bey c wird im ersten Bruche der größere Theil öfter, als im zweyten der kleinere gesetzt, daher auch der erste Bruch größer seyn muß, als der zweyte, oder

$$\begin{array}{l} 6 > 3 \\ 2 < 4 \\ \hline 6:2 > 3:4 \end{array}$$

also ist $6:2 > 3:4$, d. h. $\frac{6}{2} > \frac{3}{4}$ (I. §. 62. IV.).

III. Zusatz: Wenn in zwey, oder mehreren Brüchen der Zähler dem Nenner gleich ist, so sind diese Brüche, falls sie Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, einander gleich, z. B. $\frac{4}{4} = \frac{8}{8}$; weil hier jeder Bruch dem Ganzen gleich ist, da jederzeit in dieser Voraussetzung das Ganze in eben so viele gleiche Theile getheilt wird, als es der Nenner, der hier dem Zähler gleich ist, anzeigt, und diese Theile des nämlichen Ganzen auch jederzeit so oft genommen werden, daß sie zusammen das Ganze geben (§. 3. b.), oder

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{4} = 4 : 4 = 1 \\ \frac{8}{8} = 8 : 8 = 1 \end{array}\right\}$$ (I. §. 61. Zus. IV.).

also ist $\frac{4}{4} = \frac{8}{8}$ (I. §. 10. Nro. 4.).

IV. Zusatz: Wenn die Zähler zweyer, oder mehrerer Brüche, welche Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, und ebenfalls alle Nenner unter einander gleich sind, so sind die Brüche selbst einander gleich, z. B. $\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$, oder

$$\begin{array}{l} 2 = 2 \\ 4 = 4 \\ \hline 2:4 = 2:4 \end{array}$$

also ist $2:4 = 2:4$, d. h. $\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$ (I. §. 62. I.)

Es ist also auch jeder Bruch, wie überhaupt jede Größe (I. §. 10. Nro. 1.) sich selbst gleich.

V. Zusatz: Bey einem unächten Bruche findet

man die darin enthaltenen Ganzen, wenn man den Zähler mit dem Nenner dividirt, z. B. $\frac{8}{4} = 2$, oder z. B. $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$; weil $\frac{8}{4} = 8 : 4 = 2$, und $\frac{9}{4} = 9 : 4 = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Wenn demnach bey der Division ganzer Zahlen ein Rest bleibt, der mit dem Divisor, indem alle Theile des Dividends damit zu dividiren sind, dividirt werden soll, so erhält man, da der Rest immer kleiner ist, als der Divisor, jederzeit einen ächten Bruch, der durch das Additionszeichen, oder kürzer gewöhnlich ohne dasselbe dem Quotienten beygesetzt wird, wie dieses bey der Division ganzer Zahlen (I. §. 73.) geschehen ist, wo $72\frac{1345}{4000}$ als Quotient durch die Division gefunden wurde.

Anmerkung: Sowohl aus diesen Zusätzen, als auch aus dem, was von den Brüchen in den bisherigen §§. dieses Hauptstückes gesagt wurde, ist ersichtlich, daß der Werth eines Bruches weder durch den Zähler allein, noch durch den Nenner allein, sondern durch den Zähler und Nenner zugleich, oder wie sich einige ausdrücken, durch das Verhältniß des Zählers zum Nenner, und durch die Größe des Ganzen, von welchem gewiße Theile gesetzt werden, bestimmt werde.

§. 6.

II. Lehrsatz:

A) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man entweder den Zähler mit dieser Zahl multiplicirt, oder aber den Nenner damit dividirt.

B) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man damit den Zähler dividirt, oder aber mit derselben den Nenner multiplicirt.

In den beiden ersten Fällen bleibt der Nenner, und in den beiden letzten der Zähler unverändert.

Beweis von A.

a) Es sey z. B. $\frac{3}{4}$ mit 2 zu multipliciren, d. h. man solle $\frac{3}{4}$ zweymal setzen (I. §. 45. a.). Nach den

bey den benannten Zahlen aufgestellten Regeln (I. §. 101.), indem $\frac{3}{4}$ eben so viel ist, als 3 Viertel (§. 2.), erhält man das verlangte Product, wenn man bloß die Zahlen mit einander multiplicirt, und dem Producte wieder die Benennung des Multiplicands beyfügt; daher ist 3 Viertel X 2 = 6 Viertel, oder $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4}$. Ist von einem Gulden die Rede, so ist

$\frac{3}{4}$ fl. = 45 kr. (§. 1. und §. 2.),
ferner 2 = 2
also ist $\frac{3}{4}$ fl. X 2 = 45 kr. X 2 (I. §. 46. I.);
dann 45 kr. X 2 = 90 kr.
und $\frac{6}{4}$ fl. = 90 kr.
folglich ist $\frac{3}{4}$ fl. X 2 = $\frac{6}{4}$ fl.

b) Läßt man den Zähler unverändert, und dividirt man dagegen den Nenner mit 2, so setzt man davon den zweyten Theil (die Hälfte), der nun auch, wenn man damit den vorigen Zähler dividirt, einen Quotienten giebt, der das Zweyfache des vorigen ist.

Nach dem Lehrsatze des §. 5. ist aber der Bruch eben jener Quotient, den man erhält, wenn man den Zähler mit dem Nenner dividirt, somit wird er dadurch mit 2 multiplicirt, daß man seinen Nenner mit 2 dividirt, während man dann den Zähler unverändert läßt.

Ist nun wieder von einem Gulden die Rede, so ist

$\frac{3}{4}$ fl. = 45 kr.
ferner 2 = 2
also ist $\frac{3}{4}$ fl. X 2 = 45 kr. X 2 = 90 kr.
dann $\frac{3}{2}$ fl. = 90 kr.
folglich ist $\frac{3}{4}$ fl. X 2 = $\frac{3}{2}$ fl.

Das heißt $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{6}{4}$, oder auch $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{2}$.

Beweis von B.

a) Es sey z. B. $\frac{4}{7}$ mit 4 zu dividiren, d. h. man soll jene Zahl finden, die in $\frac{4}{7}$ viermal enthalten ist,

oder die 4mal gesetzt $\frac{1}{5}$ wieder giebt. (I. §. 61. Zus. I.), oder aber was eines ist, man soll $\frac{4}{5}$ in 4 gleiche Theile theilen, und davon einen — den 4ten Theil nehmen. (I. §. 110. B.).

Anstatt $\frac{4}{5}$ kann ich auch schreiben „4 Fünftel“, indem 4 fünfte Theile eines Ganzen das Nämliche bezeichnen, und das Wort „Fünftel“ nur der kürzere Ausdruck ist.

Nach den bey den benannten Zahlen aufgestellten Divisionsregeln (I. §. 104.) ist 4 Fünftel : 4 = 1 Fünftel; mithin ist auch $\frac{4}{5} : 4 = \frac{1}{5}$, welches man eben erhält, wenn man den Zähler mit 4 dividirt, und den Nenner unverändert läßt.

Ferner ist $\frac{1}{5}$ wirklich der 4te Theil von $\frac{4}{5}$, da $\frac{1}{5} \times 4 = \frac{4}{5}$.

Ist von einem Gulden die Rede, so ist

	$\frac{4}{5}$ fl. = 48 kr.	(§. 1. und §. 2.)
und	4 = 4	(I. §. 10. Nro. 1.)
also ist	$\frac{4}{5}$ fl. : 4 = 48 kr. : 4 = 12 kr.	
ferner	$\frac{1}{5}$ fl. = 12 kr.	
folglich ist	$\frac{4}{5}$ fl. : 4 = $\frac{1}{5}$ fl.	(I. §. 10. Nro. 4.)

b) Läßt man in dem Bruche den Zähler unverändert, und multiplicirt man dagegen den Nenner mit 4, so wird dieses Product das Vierfache des vorigen Nenners; dividirt man nun damit den Zähler, so erhält man einen Quotienten, der deßwegen nur der 4te Theil des vorigen ist; eben dieser Quotient ist der Bruch, man hat also dadurch von diesem den 4ten Theil gesetzt, d. h. ihn mit 4 dividirt; oder $\frac{4}{5} : 4 = \frac{4}{20}$.

Ist nun wieder von einem Gulden die Rede, so ist

	$\frac{4}{5}$ fl. = 48 kr.	
	4 = 4	
also ist	$\frac{4}{5}$ fl. : 4 = 48 kr. : 4 = 12 kr.	(I. §. 62. I.).
ferner	$\frac{4}{20}$ fl. = 12 kr.	
folglich ist	$\frac{4}{5}$ fl. : 4 = $\frac{4}{20}$ fl.	(I. §. 10. Nro. 4.)

Das heißt $\frac{4}{5} : 4 = \frac{4 : 4}{5} = \frac{1}{5} = \frac{4}{5 \cdot 4} = \frac{4}{20}$.

Man multiplicirt, um keinen neuen, und dadurch keinen zusammengesetzten Bruch (§. 3. d.) zu erhalten, sowohl bey der Division, als auch bey der Multiplication jederzeit auf die angegebene Weise, wenn man den Zähler oder Nenner nicht ohne Rest sollte dividiren können; z. B. $\frac{3}{7} \times 4 = \frac{12}{7}$, oder $\frac{5}{9} : 6 = \frac{5}{54}$.

§. 7.

III. Lehrsatz:

A) Der Bruch, d. h. der Werth des Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner zugleich mit der nämlichen Zahl multiplicirt; und

B) Der Bruch bleibt auch unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl dividirt.

Beweis von A und B zugleich.

1) Der Bruch kann als ein Quotient betrachtet werden, wo dann der Zähler desselben der Dividend, und der Nenner der Divisor ist. (§. 5.).

2) Der Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend, und den Divisor mit der nämlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt. (I. §. 64.).

3) Also bleibt der Werth des Bruches unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt.

Die Wahrheit dieses Lehrsatzes könnte aus dem vorigen Lehrsatze auch so erwiesen werden.

1) Den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl multipliciren heißt eben soviel, als den Bruch selbst mit dieser Zahl multipliciren, und den Nenner desselben zugleich mit dieser Zahl multipliciren, heißt eben soviel, als den Bruch selbst mit dieser Zahl dividiren, und somit auch eben soviel, als den Zähler mit der nämlichen Zahl dividiren.

2) Eine Zahl bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man sie mit der nämlichen Zahl multiplicirt, und dividirt (I. §. 63. Zus. II.).

3) Also bleibt auch der Werth des Bruches un-

verändert, wenn man Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicirt.

Auf eine ähnliche Weise würde man beweisen, daß der Bruch nicht verändert werde, wenn man Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl dividirt.

Daher ist z. B. $\frac{3}{5} = \frac{3 \,.\, 4}{5 \,.\, 4} = \frac{12}{20}$, und $\frac{2}{4} = \frac{2 \,.\, 2}{4 \,.\, 2} = \frac{1}{2}$.

Drücken diese Brüche Theile eines Guldens aus, so sind $\frac{3}{5}$ fl. = 36 kr., und $\frac{12}{20}$ fl. betragen ebenfalls 36 kr.; ferner $\frac{2}{4}$ fl. = 30 kr., und $\frac{1}{2}$ fl. giebt ebenfalls 30 kr.; es ist somit durch die eben benannte Veränderung, wenn gleich Zähler und Nenner kleinere, oder größere Zahlen geworden sind, der Werth der Brüche nicht verändert worden.

III.

Aufgaben.

§. 8.

A) Ganze in Brüche zu verwandeln, die Theile der nämlichen anfangs gegebenen Ganzen ausdrücken.

Auflösung:

a) Ist kein bestimmter Nenner gegeben, so schreibe man die gegebene Zahl als Zähler, mache das Bruchzeichen (—), und schreibe 1 als Nenner des Bruches; z. B. man soll 6 Ganze in einen Bruch verwandeln, man erhält $\frac{6}{1}$.

b) Ist ein bestimmter Nenner gegeben, so multiplicire man damit die ganze Zahl, das erhaltene Product schreibe man, indem man das Bruchzeichen macht, als Zähler des Bruches; z. B. man soll 6 Ganze in einen Bruch verwandeln, der den Nenner 4 hat; man erhält auf die angegebene Weise den Bruch $\frac{24}{4}$.

Grund des Verfahrens:

Wenn Ganze in Brüche verwandelt werden, so darf der Werth nicht verändert werden, d. h. der er-

haltene Bruch muß dem Werthe nach eben so viel betragen, als die anfangs gegebene ganze Zahl; es ist aber

1) die ganze Zahl 6 dem Werthe nach, indem 1 nichts dividirt (I. §. 61. Zus. II.), eben so viel, als $\frac{6}{1}$, oder $6 = \frac{6}{1}$; und

2) die ganze Zahl 6 ist eben so viel, als $\frac{24}{4}$, oder $6 = \frac{24}{4}$; weil so die Zahl 6 mit 4 sowohl multiplicirt, als auch dividirt wird (I. §. 63. Zus. II.), und der gegebenen Aufgabe gemäß der Bruch Theile des anfangs gegebenen Ganzen ausdrücken muß.

§. 9.

B) Brüche in andere Brüche zu verwandeln, die einen gegebenen Nenner haben.

Auflösung:

a) Kann man mit dem Nenner des ersten Bruches den Nenner des neuen Bruches ohne Rest dividiren, so dividirt man wirklich, multiplicirt mit dem Quotienten den Zähler des ersten Bruches, und schreibt unter dieses Product, nachdem man das Bruchzeichen gemacht hat, den gegebenen Nenner; z. B. $\frac{3}{4}$ sey in einen Bruch zu verwandeln, der den Nenner 60 hat. Es ist hier 60 durch 4 ohne Rest theilbar, da $60 : 4 = 15$ ist, und somit kein Rest bleibt; man multiplicire den Quotienten 15 mit 3, man erhält 45; daher ist $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$; auf diese Weise ist der Bruch $\frac{3}{4}$ in einen andern Bruch $\frac{45}{60}$, der den gegebenen Nenner 60 hat, verwandelt worden.

b) Kann man den neuen Nenner mit dem Nenner des gegebenen Bruches nicht ohne Rest dividiren, so multiplicire man vorhin den neuen Nenner mit dem Zähler des Bruches, und dividire dann das Product mit dem Nenner des gegebenen Bruches, den dadurch erhaltenen Quotienten setze

man

man dann als Zähler jenes Bruches, in welchen der erste verwandelt werden soll; z. B. man soll $\frac{3}{8}$ in einen andern Bruch verwandeln, der den Nenner 60 hat; man multiplicire 60 mit 3, man erhält 180, dieses Product 180 dividire mit 8, man erhält $22\frac{4}{8}$, und somit den zusammengesetzten Bruch $\frac{22\frac{4}{8}}{60}$; oder was eines ist, $22\frac{4}{8}$ Sechzgerl; wodurch der zusammengesetzte Bruch, indem man ihn als eine benannte Zahl betrachtet, wieder in der Gestalt eines einfachen Bruches (§. 3. d) ausgedrückt wird.

Beweis:

1) Ein Bruch bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner desselben mit der nämlichen Zahl multiplicirt, und dividirt (§. 7. A. u. B.);

2) Nun aber dieses geschieht, wenn man nach dieser Regel einen Bruch in einen andern mit einem gegebenen Nenner verwandelt;

3) Also erhält man jederzeit einen Bruch, der dem Werthe nach dem vorigen gleich ist, und zugleich den gegebenen Nenner hat.

In dem angeführten ersten Beyspiele bey a. hat man $\frac{3}{4}$ in $\frac{45}{60}$ verwandelt, indem man den Zähler, und Nenner des Bruches $\frac{3}{4}$ sowohl mit 60 multiplicirte, als auch zugleich mit 4 dividirte; es ist nämlich $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 60}{4 \cdot 60} = \frac{180}{240}$, und $\frac{180 : 4}{240 : 4} = \frac{45}{60}$, also ist auch $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ (1. §. 10. Nro. 4).

In dem angeführten zweyten Beyspiele bey b. hat man den Bruch $\frac{3}{8}$ in den Bruch $\frac{22\frac{4}{8}}{60}$ verwandelt; indem man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{3}{8}$ sowohl mit 60 multiplicirte, als auch mit 8 dividirte; es ist nämlich $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 60}{8 \cdot 60} = \frac{180}{480}$, und $\frac{180 : 8}{480 : 8} = \frac{22\frac{4}{8}}{60}$

also ist auch in Gemäßheit des eben citirten Grundsatzes $\frac{3}{8} = \frac{22\frac{4}{8}}{60}$ oder $\frac{3}{8} = 22\frac{4}{8}$ Sechzgerl (§. 2. a.).

§. 10.

Einige Erklärungen in Absicht auf die Verkleinerung der Brüche.

a) Eine Zahl heißt das Maaß einer andern Zahl, wenn sie diese ohne Rest dvidirt; z. B. 4 ist das Maaß von 12, weil 12 : 4 = 3, und also da kein Rest bleibt.

b) Eine Zahl heißt das gemeine Maaß mehrerer anderen Zahlen, wenn sie dieselben, oder auch nur einige davon — wenigstens zwey ohne Rest dividirt; z. B. 4 ist das gemeine Maaß der Zahlen 8, 12, 16, und auch der Zahlen 3, 8, 12, 5, 16, weil sie im ersten Falle alle, und im zweyten einige, nämlich drey dieser Zahlen ohne Rest dividirt.

c) Eine Zahl, die nur durch 1, und durch sich selbst ohne Rest theilbar ist, heißt eine einfache, oder eine Primzahl (Numerus primus), z. B. die Zahlen 3, 5, 7, 13, ꝛc.

Jede Zahl ist durch 1, und durch sich selbst theilbar; z. B. 13 : 13 = 1, und 13 : 1 = 13.

d) Eine Zahl, die nicht bloß durch 1, und durch sich selbst, sondern auch durch eine, oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt eine zusammengesetzte Zahl (Numerus compositus); z. B. 8, 12, 24, indem 8:2=4, 8:4=2, 12:4=3, 12:6=2, 24 : 8 = 3, 24 : 6 = 4, ꝛc.

e) Zahlen, die außer der Zahl 1 kein gemeines Maaß haben, heißt man relative Primzahlen, — z. B. 4, 15; indem es außer 1 keine Zahl giebt, mit der man 4 und 15 zugleich ohne Rest theilen könnte.

f) Zahlen, die außer 1 ein gemeines Maaß haben, heissen zusammengesetzte Zahlen unter sich; z. B. 4, 8, 16, diese Zahlen sind durch 2, oder 4 theilbar.

g) Eine Zahl, die zwey, oder mehrere gegebene

Zahlen so ohne Rest dividirt, daß die Quotienten relative Primzahlen sind, heißt das **größte gemeine Maaß** dieser Zahlen; z. B. zu den Zahlen 8, 16, und 24 ist 8 das **größte gemeine Maaß**, weil 8 : 8 = 1, 16 : 8 = 2, 24 : 8 = 3, und die erhaltenen Quotienten „1, 2, 3" relative Primzahlen sind.

§. 11.
Regeln rücksichtlich der Verkleinerung der Brüche.

Nachstehende Regeln, derer allgemeine Giltigkeit in der Folge bey der Theilbarkeit ganzer Zahlen erwiesen wird, können öfters bey Verkleinerung der Brüche sehr geschwind, und leicht in Anwendung gebracht werden.

a) Wenn das letzte, oder niedrigste Ziffer zur rechten Seite durch 2, 5, oder 10 (im letzten Falle muß das niedrigste Ziffer Null seyn) ohne Rest theilbar ist, so ist die Zahl selbst durch 2, 5, oder 10 ohne Rest theilbar; z. B. 468 ist durch 2, 465 durch 5, und 460 durch 10 ohne Rest theilbar; weil 8 : 2 = 4, 5 : 5 = 1, und im letzten Falle 460 : 10 = 46.

b) Läßt sich die Summe des an der Stelle der Einer stehenden Ziffers, und des gegen die Linke hin folgenden doppelten Ziffers mit 4 theilen, oder aber kann man die Summe des äußersten rechtsstehenden Ziffers, dann des folgenden doppelten, und des vierfachen an der Stelle der Hunderte stehenden Ziffers mit 8 theilen, so kann man auch die Zahlen selbst ohne Rest mit 4, oder 8 theilen; z. B. 628 ist durch 4, und 2592 durch 8 ohne Rest theilbar, weil 12 = 8 † 2 X 2 = 8 † 4 durch 4, und 40 = 2 † 2 X 9 † 4 X 5 = 2 † 18 † 20 durch 8 ohne Rest theilbar ist.

c) Addirt man alle Ziffern bloß nach ihrem

natürlichen Werthe zusammen, und läßt sich die Summe durch 3 oder 9 ohne Rest theilen, so läßt sich die ganze gegebene Zahl durch 3 oder 9 ohne Rest theilen; z. B. 3654 läßt sich sowohl durch 3, als 9 ohne Rest theilen, weil $4 + 5 + 6 + 3 = 18$, und diese Zahl 18 durch beide ohne Rest getheilt werden kann, da $18 : 9 = 2$, und $18 : 3 = 6$.

§. 12.

C) Für zwey gegebene ganze Zahlen das größte gemeine Maaß zu suchen; z. B. für die Zahlen 360, und 1155.

Auflösung:

1) Die größere Zahl 1155, die man mit dem Buchstaben A benennen kann, nehme man als Dividend, und die kleinere Zahl 360, die man mit dem Buchstaben B benennt, setze man als Divisor, und dividire wirklich:

$$\begin{array}{r|l} A = 1155 & 3 \\ B = 360 & \\ 1080 & \\ \hline 75 & \end{array}$$

2) Den gebliebenen Rest 75 benenne man mit C, und dividire damit den vorigen Divisor B = 360, man erhält:

$$\begin{array}{r|l} B = 360 & 4 \\ C = 75 & \\ 300 & \\ \hline 60 & \end{array}$$

3) Den gebliebenen Rest 60 benenne man mit D, und dividire damit C = 75, man erhält:

$$\begin{array}{r|l} C = 75 & 1 \\ D = 60 & \\ 60 & \\ \hline 15 & \end{array}$$

4) Den gebliebenen Rest 15 benenne man mit E, und dividire damit den vorigen Divisor D = 60, man erhält:

$$\begin{array}{r|l} D = 60 & 4 \\ E = 15 & \\ 60 & \\ \hline - & \end{array}$$

5) Weil man die Division so lange fortsetzte (welches immerhin geschehen muß), bis man einen Divisor E = 15 erhielt, der seinen Dividend D = 60 ohne Rest dividirte, so ist eben diese Zahl E = 15 das gesuchte größte gemeine Maaß der Zahlen 360, und 1155; 360 : 15 = 24, und 1155 : 15 = 77, welche beide Zahlen „24 und 77", wie dieses bey der Theilbarkeit ganzer Zahlen erwiesen wird, relative Primzahlen sind.

6) Bekömmt man bey diesem Verfahren den Rest = 1, so zeigt dieses an, daß die Zahl 1 das größte gemeine Maaß ist, und somit die beiden gegebenen Zahlen schon relative Primzahlen sind, indem 1 als Divisor den Dividend zum Quotienten giebt (I. §. 61. Zus. II.).

Bey Auflösung dieser Aufgabe ist zu bemerken, daß man die einzelnen Quotienten, da bey jeder Division ein anderer Dividend und Divisor vorkömmt, immerhin rechts hinschreiben könne, und sie somit nicht, wie es bey der Division ganzer Zahlen, wo man aber auch immerhin bey dem ganzen Divisions- Acte den

nämlichen Dividend und Divisor hatte, verlangt worden ist, neben einander zu schreiben sind.

Die Auflösung in dem eben angeführten Beyspiele, wie auch jene in noch zwey anderen Beyspielen setze ich hier noch ausführlich aus:

I. Beyspiel.

A =	1155	3
B =	360	
	1080	
C =	75	4
	300	
D =	60	1
	60	
E =	15	4
	60	

—

Also ist 15 das größte gemeine Maaß der Zahlen 360, und 1155;

II. Beyspiel.

A =	494	1
B =	442	
	442	
C =	52	8
	416	
D =	26	2
	52	

—

Also ist 26 das größte gemeine Maaß der Zahlen 494, und 442; 494 : 26 = 19, 442 : 26 = 17.

III. Beyspiel.

A =	19	1
B =	17	
	17	
C =	2	8
	16	
D =	1	2
	2	

—

Also ist D = 1 daß größte gemeine, d. h. die Zahlen 19 und 17 sind relative Primzahlen.

§. 13.

D) Brüche zu verkleinern.

Auflösung:

Brüche verkleinern heißt dieselben auf eine kleinere Benennung bringen, welches geschieht, wenn man dieselben, ohne ihren Werth zu verändern, in andere Brüche verwandelt, derer Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind.

Auf die kleinste Benennung werden dann die Brüche gebracht, wenn man sie, ohne ihren Werth zu verändern, in solche Brüche verwandelt, derer Zähler und Nenner relative Primzahlen sind; wodurch sie dann in solche Brüche verwandelt werden, die nicht mehr verkleinert werden können.

Die Verkleinerung der Brüche geschieht nach folgenden Regeln:

a) Theilet der Zähler den Nenner, oder aber dieser jenen ohne Rest, so ist eben ein solcher Zähler, oder Nenner das größte gemeine Maaß des Zählers und Nenners, mit dem man somit den Bruch auf die kleinste Benennung bringen kann; z. B. man soll den Bruch $\frac{50}{100}$ verkleinern; 50 theilet sich selbst, und 100 ohne Rest, indem $50 : 50 = 1$, und $100 : 50 = 2$, daher ist $\frac{50}{100} = \frac{50 : 50}{100 : 50} = \frac{1}{2}$, wo 1 und 2 relative Primzahlen sind.

b) Ist dieses der Fall nicht, so suche man entweder nach §. 11. ein gemeines Maaß, oder aber nach §. 12. das größte gemeine Maaß für den Zäler und Nenner, und dividire damit diese beiden; man wird den Bruch im zweyten Falle immer auf die kleinste, und im ersten Falle wenn nicht auf die kleinste, wenigstens doch auf eine kleinere Benennung gebracht, und dadurch den Bruch verkleinert haben.

Es seyen z. B. die Brüche $\frac{8}{12}$, $\frac{24}{39}$ und $\frac{360}{1155}$ zu verkleinern; man erhält $\frac{8}{12} = \frac{8 : 2}{12 : 2} = \frac{4}{6}$, ferner $\frac{24}{39} = \frac{24 : 3}{39 : 3} = \frac{8}{13}$, und $\frac{360}{1155} = \frac{360 : 15}{1155 : 15} = \frac{24}{77}$; wodurch nun der erste Bruch $\frac{8}{12}$ auf eine kleinere, und die beiden letzten Brüche $\frac{24}{39}$, $\frac{360}{1155}$ auf die kleinste Benennung gebracht worden sind.

c) Sieht man gleich zum voraus, oder aber findet man nach §. 12, daß Zähler und Nenner außer 1 kein gemeines Maaß mehr haben, so sind dieselben schon relative Primzahlen, und die Brüche können dann nicht mehr verkleinert werden; z. B. $\frac{5}{7} = \frac{5 : 1}{7 : 1} = \frac{5}{7}$.

Der Grund des Verfahrens ist einleuchtend, indem man offenbar sieht, daß so immerhin Zähler und

Nenner mit der nämlichen Zahl dividirt werden, wodurch der Werth der Brüche nicht verändert wird (§. 7. B.).

§. 14.

E) Den Werth der Brüche, die Theile eines bestimmten Ganzen darstellen, in ganzen Zahlen, oder wenigstens in solchen Brüchen auszudrücken, die Theile eines Ganzen niederer Ordnung bezeichnen.

Auflösung:

a) Ist der Bruch ein unächter — uneigentlicher Bruch, so dividire man den Zähler mit dem Nenner (§. 5. Zus. V.), um so, wie sich einige ausdrücken, die Ganzen herauszuziehen, und somit zu finden, wie viel ganze in dem Bruche enthalten sind. Bleibt dabey ein Rest, so hänge man mittels des Additionszeichens, oder ohne dasselbe den Rest als einen neuen Bruch, indem man den Rest als Zähler, und den vorigen Nenner als Nenner unter denselben hinschreibt, den durch die Division erhaltenen Ganzen an; z. B. $\frac{8}{4}$ fl. = 2 fl., und $\frac{11}{4}$ fl. = 2 fl. † $\frac{3}{4}$ fl., oder kürzer: $\frac{11}{4}$ fl. = 2 $\frac{3}{4}$ fl.

b) Will man den Werth dieses neuen Bruches $\frac{3}{4}$ fl., oder überhaupt jenen eines ächten Bruches in ganzen Zahlen ausdrücken, so muß selber, da er weniger ist als jenes Ganze, von dem er gewiße Theile ausdrückt, auf niedere Einheiten (I. §. 90. und 91. A.) reducirt werden, indem man ihn mit der Reductionszahl multiplicirt; z. B. $\frac{3}{4}$ fl. = $\frac{3}{4}$ X 60 kr. $\frac{180}{4}$ kr. = 45 kr., daher geben $\frac{3}{4}$ fl., indem 1 fl. 60 kr. hat, 45 kr., oder $\frac{3}{4}$ fl. = 45 kr.

Auf diese Weise wird eigentlich nach §. 9. der Bruch $\frac{3}{4}$ in einen andern verwandelt, der den Nenner

60 hat, indem $\frac{3}{4} = \frac{3.60}{4.60} = \frac{180}{240} = \frac{180 : 4}{240 : 4} = \frac{45}{60}$, und $\frac{45}{60}$ fl. = 45 kr.

Läßt sich die Reductionszahl mit dem Nenner des Bruches dividiren, so ist es einfacher, wenn man gleich anfangs dividirt, und dann mit dem Zähler den Quotienten multiplicirt; kann man aber nicht ohne Rest dividiren, so muß man auf die eben angegebene Weise verfahren; z. B. $\frac{7}{10}$ Ct. werden in ganzen Zahlen ausgedrückt, wenn man die Reductionszahl 100, da 1 Centner 100 Pfund hat, mit 10 dividirt, und den Quotienten 10 mit 7 multiplicirt, man erhält $\frac{7}{10}$ Ct. = 70 Pf.

c) Wenn es die Aufgabe erfordert, so kann man auf diese Weise den Werth eines jeden Bruches immer wieder in Einheiten niederer Ordnung ausdrücken, bis man auf die Einheiten der niedrigsten Benennung kömmt, wo dann der letzte Bruch, welcher Theile des Ganzen der niedrigsten Ordnung ausdrückt, beybehalten werden muß; z. B. $\frac{9}{17}$ fl. = 31 $\frac{13}{17}$ kr. = 31 kr. 6 $\frac{2}{17}$ Häller.

§. 15.

F) Den Werth der Ganzen, oder auch der Brüche, die Theile eines bestimmten Ganzen ausdrücken, in Einheiten höherer Ordnung auszudrücken.

Auflösung:

a) Sowohl die gegebenen ganzen Zahlen, als auch die Brüche, sie mögen ächte, oder unächte Brüche seyn, dividirt man (I. §. 90. und 91. B.) mit der Reductionszahl, um so dieselben auf Einheiten höherer Ordnung zu reduciren. Wenn man die auf diese Weise erhaltenen Brüche verkleinern kann, so verkleinert man wirklich nach §. 13; z. B. man mache 15 kr. zu Gulden, man erhält, daß

15 kr. = $\frac{15}{60}$ fl., und sie somit $\frac{1}{4}$ fl. geben; oder aber man mache $\frac{2}{3}$ kr. zu Gulden, man erhält, daß $\frac{2}{3}$ kr. = $\frac{2}{186}$ fl. = $\frac{1}{90}$ fl.; weil $\frac{2}{3} : 60 = \frac{2}{3.60} = \frac{2}{180} = \frac{1}{90}$ (§. 6. B.)

b) Soll man die auf diese Weise erhaltenen Brüche wieder auf Einheiten höherer Ordnung reduciren, so dividirt man wieder mit der gehörigen Reductionszahl, und setzt dann dieses Verfahren so lange fort, bis die gegebenen ganzen Zahlen oder Brüche auf die verlangten Einheiten reducirt sind.

Man soll z. B. $\frac{1}{2}$ Quintl auf Centner reduciren; man dividirt nun mit 4, weil 4 Quintl 1 Loth geben, $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$, daher ist $\frac{1}{2}$ Quintl = $\frac{1}{8}$ Loth; ferner dividirt man mit 32, weil 1 Pfund 32 Loth hat, daher ist $\frac{1}{8}$ Loth = $\frac{1}{256}$ Pfund, indem $\frac{1}{8} : 32 = \frac{1}{256}$; endlich dividirt man mit 100, weil 100 Pfund 1 Centner geben, es ist $\frac{1}{256}$ Pfund = $\frac{1}{25600}$ Centner; weßwegen $\frac{1}{2}$ Quintl = $\frac{1}{8}$ Loth = $\frac{1}{256}$ Pfund = $\frac{1}{25600}$ Centner, d. h. es ist $\frac{1}{2}$ Quintl = $\frac{1}{25600}$ Centner (I. §. 10. Nro. 4.).

§. 16.

G) **Die möglichst kleinste Zahl zu finden, die durch alle Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest theilbar ist.**

Auflösung:

1) Es seyen z. B. die Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{3}{10}$ gegeben, und man soll die möglichst kleinste Zahl finden, die durch die Nenner aller dieser Brüche ohne Rest theilbar ist.

2) Man suche nun zu diesen Nennern ein gemeines Maaß, d. h. eine solche Zahl, die mehrere dieser Nenner — wenigstens zwey ohne Rest dividirt. Je größer dieses Maaß ist, und je meh-

rere Nenner dasselbe ohne Rest theilet, desto geschwinder erhält man die verlangte Zahl.

3) Die gebrauchten Maaße schreibe man links, und rechts die vorhandenen Nenner, die man von jenen durch einen Verticalstrich trennt.

4) Wo man immer mit dem gemeinschaftlichen Maaße ohne Rest dividiren kann, da dividirt man wirklich, und setzt der Ordnung nach die erhaltenen Quotienten unter die oben stehenden Zahlen hin. Wo man aber nicht ohne Rest theilen kann, da schreibt man die oben stehenden Zahlen unverändert herunter. Weil man zuletzt multipliciren muß, und der Factor 1 nichts multiplicirt, so ist es nicht nothwendig, daß man den Quotienten 1 anschreibt, außer zuletzt, wo man, zumal wenn nur noch eine einzige andere Zahl übrig ist, die Zahl 1 einmal schreiben kann. Man erhält:

2	6, 7, 12, 8, 15, 21, 14, 10
	3, 7, 6, 4, 15, 21, 7, 5

5) Zu den unten stehenden Zahlen suche man wieder ein gemeines Maaß etwa wieder 2, und verfahre dann wie vorhin:

2	6, 7, 12, 8, 15, 21, 14, 10
2	3, 7, 6, 4, 15, 21, 7, 5
	3, 7, 3, 2, 15, 21, 7, 5

6) Zu den unten stehenden Zahlen suche man wieder ein gemeines Maaß etwa 3, zu den dadurch erhaltenen Zahlen suche man abermal ein gemeines Maaß etwa 7, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man relative Primzahlen erhält, für die es dann kein gemeines Maaß mehr giebt:

2	6, 7, 12, 8, 15, 21, 14, 10
2	3, 7, 6, 4, 15, 21, 7, 5
3	3, 7, 3, 2, 15, 21, 7, 5
7	7, 2, 5, 7, 7, 5
5	2, 5, 5
	2, 1

7) Die zuletzt gebliebenen Zahlen „2, 1" sind relative Primzahlen; man multiplicire demnach sowohl diese, als auch alle gebrauchten Maaße, indem man die Stellen der Factoren verwechseln kann, in beliebiger Ordnung mit einander (I. §. 57.), man erhält: „1.2.5.7.3.2.2 = 840"

8) 840 ist nun die möglichst kleinste Zahl, die durch die erwähnten Nenner ohne Rest theilbar ist, d. h. unter allen möglichen Zahlen, die durch alle diese Nenner ohne Rest theilbar sind, ist die Zahl 840 die kleinste.

Der Beweis für die Wahrheit und allgemeine Giltigkeit der aufgestellten Regeln, daß nämlich das auf diese Weise erhaltene Product jederzeit die verlangte Zahl sey, wird in der Buchstabenrechnung bey der Theilbarkeit ganzer Zahlen angegeben werden.

Man kann sich aber gleich jetzt einigermaßen von der Richtigkeit seines Verfahrens überzeugen, wenn man den Versuch macht, und die Zahl 840 durch die erwähnten Nenner dividirt, wo dann nirgends ein Rest bleiben wird; indem 840 : 6 = 140, 840 : 7 = 120 ꝛc.

Anmerkung: Weil nur eine Zahl die gesuchte möglichst kleinste, durch die gegebenen Nenner ohne Rest theilbare Zahl seyn kann, so findet man dieselbe jederzeit, man mag was immer für gemeine Maaße nehmen. Indessen, wie es schon bemerkt wurde, nehme man, um geschwinder zum vorgesteckten Ziele zu gelangen, immerhin, wenn es angeht, etwas größere Maaße, und zugleich auch solche, die mehrere der vorhandenen Zahlen ohne Rest dividiren. Aus der vorliegenden Aufgabe muß man immerhin ermessen, auf welchem Wege etwa die gesuchte Zahl geschwinder gefunden werden könnte.

§. 17.

H) Mehrere Brüche in andere Brüche von einem gegebenen allgemeinen Nenner zu verwandeln, wenn man zum voraus weiß, daß sich dieser durch alle Nenner der vorhandenen Brüche ohne Rest dividiren läßt.

Auflösung:

1) Man nehme als Beyspiel die im vorigen §. angeführten Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{3}{10}$; man weiß zufolge dieses §., daß die Zahl 840 durch die Nenner aller dieser Brüche theilbar ist.

2) Man schreibe nun in einer senkrechten Reihe von oben nach unten alle gegebenen Brüche, ziehe zur rechten Seite einen senkrechten Strich, und mache dadurch eine neue Spalte.

3) Oben in dieser Spalte schreibe man die zum voraus bekannte Zahl, welche der allgemeine Nenner ist, der auch General-Nenner genannt wird, dividire diesen durch alle Special-Nenner der gegebenen Brüche, und schreibe die Quotienten rechts neben hin, ziehe abermal zur Rechten einen senkrechten Strich, und bilde sich dadurch eine dritte Spalte.

4) Nun multiplicire man den Zähler eines jeden links stehenden Bruches mit dem jedesmal erhaltenen Quotienten, und setze die Producte der Ordnung nach in die dritte Spalte rechts neben die Quotienten hin, so sind diese die neuen Zähler.

5) Endlich schreibe man unter diese Zähler den General-Nenner, entweder unter jeden Zähler, oder nur unter den ersten Zähler, und mache dann bey den übrigen unter das Bruchzeichen einen Punct, zum Zeichen, daß der oben stehende Nen-

ner hingedacht werden müsse; oder aber man schreibe alle neuen Zähler der Ordnung nach von der Linken zur Rechten in eine horizontale Reihe, ziehe unter dieselben eine gerade Linie, und schreibe in die Mitte unten den General-Nenner einmal hin.

6) Will man nicht nach Nro. 3. und Nro. 4. zuerst mit allen Nennern den General-Nenner dividiren, und dann die Quotienten mit den Zählern multipliciren, so kann man dagegen bey einem jeden Bruche, wie man den General-Nenner durch den Nenner desselben dividirt hat, gleich mit dem Zähler den Quotienten multipliciren.

Verfährt man nun in dem erwähnten Beyspiele nach diesen Regeln, so erhält man:

A	B	C	. . . .	M	O	S
	840					
$\frac{5}{6}$	140	700	mithin ist	$\frac{5}{6}$ =	$\frac{700}{840}$ =	$\frac{700}{\cdot}$
$\frac{2}{7}$	120	240	. . . .	$\frac{2}{7}$ =	$\frac{240}{840}$ =	$\frac{240}{\cdot}$
$\frac{5}{12}$	70	350	. . . .	$\frac{5}{12}$ =	$\frac{350}{840}$ =	$\frac{350}{\cdot}$
$\frac{7}{8}$	105	735	. . . .	$\frac{7}{8}$ =	$\frac{735}{840}$ =	$\frac{735}{\cdot}$
$\frac{11}{15}$	56	616	. . . .	$\frac{11}{15}$ =	$\frac{616}{840}$ =	$\frac{616}{\cdot}$
$\frac{4}{21}$	40	160	. . . .	$\frac{4}{21}$ =	$\frac{160}{840}$ =	$\frac{160}{\cdot}$
$\frac{1}{14}$	60	60	. . . .	$\frac{1}{14}$ =	$\frac{60}{840}$ =	$\frac{60}{\cdot}$
$\frac{3}{10}$	84	252	. . . .	$\frac{3}{10}$ =	$\frac{252}{840}$ =	$\frac{252}{\cdot}$
Q	D	F		N	P	R

oder man schreibe die neuen Brüche auch so an:

$$„\frac{700,\ 240,\ 350,\ 735,\ 616,\ 160,\ 60,\ 252}{840}“$$

In der Spalte A Q stehen die anfangs gegebenen Brüche, — in der Spalte B D die Quotienten, die man erhielt, indem man den General-Nenner 840 mit jedem Special-Nenner dividirte, — und in der Spalte C F stehen die neuen Zähler, die man erhielt,

indem man die vorigen Quotienten mit den Zählern der Brüche multiplicirte. — Ferner in der Reihe M N stehen wieder die nämlichen anfangs gegebenen Brüche, — in der Reihe O P die neuen Brüche, in welche dieselben verwandelt wurden, — und endlich in der Reihe S R diese nämlichen neuen Brüche mit der Abkürzung, daß der General-Nenner 840 nur beym ersten Bruche angeschrieben, und bey den übrigen mit einem Puncte bezeichnet wurde.

Der Grund des Verfahrens ist sowohl aus dem §. 9., als auch daher ersichtlich, weil der General-Nenner durch alle Special-Nenner ohne Rest theilbar ist, und deßwegen jeder dieser letztern ein Factor desselben, und der in der Spalte B D stehende Quotient der andere Factor ist, welche beide Factoren mit einander multiplicirt immer den General-Nenner wieder geben.

Nun hat man aber auch mit den Quotienten der Spalte B D die Zähler der Brüche der Spalte A Q, und also den Zähler, und Nenner eines jeden Bruches mit der nämlichen Zahl multiplicirt, und daher den Werth der gegebenen Brüche nicht verändert (§. 7. A.) indem offenbar $\frac{5}{6} = \frac{5 \,.\, 140}{6 \,.\, 140} = \frac{700}{840}$, $\frac{2}{7} = \frac{2 \,.\, 120}{7 \,.\, 120} = \frac{240}{840}$, $\frac{5}{12} = \frac{5 \,.\, 70}{12 \,.\, 70} = \frac{350}{840}$, $\frac{7}{8} = \frac{7 \,.\, 105}{8 \,.\, 105} = \frac{735}{840}$, $\frac{11}{15} = \frac{11 \,.\, 56}{15 \,.\, 56} = \frac{616}{840}$, $\frac{4}{21} = \frac{4 \,.\, 40}{21 \,.\, 40} = \frac{160}{840}$, $\frac{1}{14} = \frac{1 \,.\, 60}{14 \,.\, 60} = \frac{60}{840}$, $\frac{3}{10} = \frac{3 \,.\, 84}{10 \,.\, 84} = \frac{252}{840}$.

§. 18.

J) Zwey, oder mehrere Brüche unter einerley Benennung zu bringen.

a) Auflösung nach der gewöhnlichen Regel:

Mehrere Brüche unter einerley Benennung bringen heißt sie, ohne ihren Werth zu verändern, in solche Brüche verwandeln, die alle den nämlichen Nenner haben.

Dabey sind folgende Regeln zu beobachten:

1) Man multiplicire jeden Zähler mit allen

übrigen Nennern, d. h. mit allen Nennern, nur mit dem seinigen nicht (I. §. 57.), und nehme der Ordnung nach diese Producte für die Zähler,

2) man multiplicire nun auch alle Nenner unter einander, und nehme dieses Product als den gemeinschaftlichen Nenner der neuen Brüche. Es seyen z. B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, und $\frac{4}{7}$ unter einerley Benennung zu bringen. Man erhält nach diesen Regeln „1.3.5.7 = 105, 2.2.5.7 = 140, 3.2.3.7 = 126, 4.2.3.5 = 120, und 2.3.5.7 = 210," es sind demnach diese die neuen Brüche: $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{126}{210}$, $\frac{120}{210}$, oder kürzer: $\frac{105,\ 140,\ 126,\ 120}{210}$.

Beweis:

Auf diese Weise wird bey einem jeden Bruche der Zähler und Nenner mit dem Producte der übrigen Nenner, somit mit der nämlichen Zahl multiplicirt, also wird der Werth der Brüche nicht verändert (§. 7. A.), und man hat die vorigen Brüche in neue verwandelt, die alle den nämlichen Nenner haben; indem $\frac{1}{2} = \frac{1.3.5.7}{2.3.5.7} = \frac{105}{210}$, $\frac{2}{3} = \frac{2.2.5.7}{3.2.5.7} = \frac{140}{210}$, $\frac{3}{5} = \frac{3.2.3.7}{5.2.3.7} = \frac{126}{210}$, $\frac{4}{7} = \frac{4.2.3.5}{7.2.3.5} = \frac{120}{210}$.

Bey den Nennern dieser Brüche kommen die nämlichen Factoren vor, die, indem man ihre Stellen verwechseln kann (I. §. 49.), immer das nämliche Product, und somit den gemeinschaftlichen Nenner geben.

b) Auflösung nach einer leichtern Verfahrungsweise.

1) Weil man keine zusammengesetzte Brüche erhalten darf, indem diese, wenn sie schon vorhin da seyn sollten, zur Erleichterung der Rechnung durch gewiße Veränderungen in einfache verwandelt werden müssen, so darf man nicht jede beliebige Zahl als General-Nenner annehmen, und dann nach

Vor-

Vorschrift des §. 9. die diesem Nenner entsprechenden neuen Zähler suchen.

2) Vielmehr muß darauf gesehen werden, daß man eine solche ganze Zahl finde, die durch alle Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest theilbar ist.

3) Eine solche Zahl kann aber auf eine dreyfache Weise gefunden werden. Entweder weiß man dieselbe gleich beym ersten Anblicke, wie man nämlich nur die Nenner der Brüche ansieht, oder aber der größte Nenner, der immer sich selbst ohne Rest dividirt (I. §. 61. Zus. IV.), ist durch alle übrigen Nenner ohne Rest theilbar, oder endlich man sucht nach Vorschrift des §. 16. diese Zahl, die durch alle Nenner ohne Rest theilbar ist. Im letztern Falle, wenn man nämlich nach dem eben citirten §. die erwähnte Zahl sucht, hat man den großen Vortheil, daß man immer die möglichst kleinste Zahl findet, die durch alle Nenner ohne Rest theilbar ist, und somit die Brüche auf einerley, und zugleich die kleinste Benennung gebracht werden. Sollten die Nenner, indem man auf diese Weise verfährt, auch der Art seyn, daß es für sie kein gemeines Maaß mehr gäbe, und sie somit, um den gemeinschaftlichen Nenner zu erhalten, unverändert mit einander multiplicirt werden müßten, so ist es doch, zumal wenn mehrere Brüche vorhanden sind, viel bequemer, wenn man nach §. 17. zu dem General-Nenner die neuen Zähler sucht, als wenn man hingegen unmittelbar nach der im §. 18. bey a. aufgestellten Regel die Zähler mit den Nennern der übrigen Brüche multipliciren würde.

4) Hat man aber einmal jene Zahl, die als General-, gemeinschaftlicher Nenner angenommen

werden kann, so suche man nach Vorschrift des eben angeführten §. 17. die entsprechenden neuen Zähler der Brüche, und schreibe unter diese den gemeinschaftlichen Nenner.

I. Beyspiel:

Es seyen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, und $\frac{7}{8}$ unter einerley Benennung zu bringen. Man sieht hier, daß die Zahl 24 durch alle Nenner dieser Brüche ohne Rest theilbar ist. Man suche nun nach §. 17. die neuen Zähler, und man erhält die verlangten neuen Brüche, nämlich: $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$, $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$, $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$, $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$, und $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$, oder kürzer: $\frac{12,\ 16,\ 18,\ 20,\ 21}{24}$

II. Beyspiel:

Es seyen die Brüche $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{4}{1000}$ und $\frac{5}{10000}$ unter einerley Benennung zu bringen.

Man sieht hier, daß der größte Nenner 10000 durch alle übrigen Nenner ohne Rest theilbar ist, und er somit als General-Nenner angenommen werden kann.

Nach §. 17. suche man die neuen Zähler, und schreibe unter sie den gemeinschaftlichen Nenner 10000, man bringt auf diese Weise die gegebenen Brüche auf einerley, und zugleich auch auf die kleinste Benennung, weil der General-Nenner auch durch den Nenner 10000 ohne Rest muß getheilt werden können, und also nie kleiner als 10000 seyn kann.

Man erhält demnach: $\frac{3}{10} = \frac{3000}{10000}$, $\frac{7}{100} = \frac{700}{10000}$, $\frac{4}{1000} = \frac{40}{10000}$, und der Bruch $\frac{5}{10000}$ ist ohnehin sich selbst gleich (I. §. 10. Nro. 1.), d. h. $\frac{5}{10000} = \frac{5}{10000}$; oder: $\frac{3000,\ 700,\ 40,\ 5}{10000}$

In diesem Falle, wenn nämlich der größte Nenner durch die übrigen ohne Rest theilbar ist, kann man sich die Arbeit, um nicht überflüssiger Weise die nämlichen Brüche mehrmal schreiben zu müssen, dadurch abkürzen, daß man gleich mit jedem Nenner den größten Nenner dividirt, und dann den Zähler und Nen-

ner eines jeden Bruches mit dem gefundenen Quotienten multiplicirt. — Den Quotienten kann man dann jedesmal oben, oder unten zu den Brüchen hinschreiben.

Es seyen z. B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{32}$, $\frac{9}{64}$ unter einerley Benennung zu bringen.

Weil der größte Nenner 64 durch alle übrigen Nenner ohne Rest theilbar ist, so nehme man diesen als den General-Nenner an, und dividire ihn mit allen übrigen Nennern, und multiplicire dann die Quotienten der Ordnung nach mit dem Zähler und Nenner eines jeden Bruches. Es ist aber $64 : 2 = 32$, $64 : 4 = 16$, $64 : 8 = 8$, $64 : 16 = 4$, $64 : 32 = 2$, und $64 : 64 = 1$, oder aber man lasse die letzte Veränderung weg, weil der letzte Bruch $\frac{9}{64}$, der zu seinem Nenner den General-Nenner 64 schon hat, unverändert bleibt. Man erhält auf diese Weise der Ordnung nach folgende neue Brüche:

Die gegebenen Brüche	$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{32}$, $\frac{9}{64}$
Die Quotienten	32, 16, 8, 4, 2, 1
Die neuen Brüche	$\frac{32}{64}$, $\frac{32}{64}$, $\frac{24}{64}$, $\frac{20}{64}$, $\frac{14}{64}$, $\frac{9}{64}$

oder kürzer: $\frac{32,\ 32,\ 24,\ 20,\ 14,\ 9}{64}$

Zufolge dieser Verfahrungsweise ist der General-Nenner immer der Dividend, der mit den Special-Nennern dividirt wird; weßwegen jeder dieser letztern mit dem unten stehenden Quotienten multiplicirt den General-Nenner wieder geben muß; um deswillen könnte diese zweyte Multiplication, weil man immer 64 zum Producte erhalten muß, auch unterbleiben; indessen aber, wenn man sie vornimmt, wird sie eine Probe der zuerst ausgeführten Division seyn. Die erste Multiplication des Zählers mit dem Quotienten muß, um die neuen Zähler zu finden, immerhin vorgenommen werden.

Ueberdieß wird dadurch der Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit der nämlichen Zahl multiplicirt, also hat man die gegebenen Brüche, ohne ihren Werth zu verändern, auf einerley, und zu-

gleich die kleinste Benennung gebracht; indem $\frac{1}{2} = \frac{1 . 32}{2 . 32} = \frac{32}{64}$, $\frac{2}{4} = \frac{2 . 16}{4 . 16} = \frac{32}{64}$ ꝛc.

III. Beyspiel.

Es seyen z. B. diese Brüche $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{10}{13}$ und $\frac{12}{17}$ auf einerley, und zugleich die kleinste Benennung zu bringen.

Weil hier die Nenner relative Primzahlen sind, und also dafür kein gemeines Maaß mehr gefunden werden kann, so multiplicirt man, um einen allgemeinen Nenner zu erhalten, diese Nenner unter einander, man erhält $153153 = 7 . 9 . 11 . 13 . 17$.

Nun suche man nach §. 17. die neuen Zähler, und schreibe unter diese den General-Nenner 153153, so hat man die Brüche auf einerley, und zwar die kleinste Benennung gebracht, indem $\frac{3}{7} = \frac{65637}{153153}$, $\frac{7}{9} = \frac{119119}{153153}$, $\frac{8}{11} = \frac{111384}{153153}$, $\frac{10}{13} = \frac{117810}{153153}$, $\frac{12}{17} = \frac{108108}{153153}$, oder kürzer: $\frac{65637,\ 119119,\ 111384,\ 117810,\ 108108}{153153}$

§. 19.

K) Bey mehreren gegebenen Brüchen zu bestimmen, welcher dem Werthe nach der größte, oder kleinste Bruch ist.

Auflösung:

a) Drücken die Brüche Theile von mehreren Ganzen aus, die gleichartig sind, und durch Reduction gleichnamig gemacht werden können, so reducire man allererst die Brüche entweder nach §. 14, oder aber nach §. 15, um so bey allen Theile eines, und des nämlichen Ganzen zu erhalten.

b) Drücken nun alle Brüche Theile des nämlichen Ganzen aus, so bringe man sie nach §. 18. auf einerley Benennung; wo dann jener Bruch der größte, oder kleinste Bruch ist, der den größten, oder kleinsten Zähler hat (§. 5. Zus. II. a.).

Man soll z. B. bestimmen, welcher aus diesen Brüchen $\frac{1}{120}$ fl., $\frac{1}{3}$ kr., und $\frac{1}{5}$ Häller der größte, oder kleinste ist.

Nach §. 15. ist $\frac{1}{3}$ kr. $= \frac{1}{180}$ fl., und $\frac{1}{5}$ Häller $= \frac{1}{2400}$ fl.; man bringe nun die Brüche auf einerley Benennung, man erhält: $\frac{1}{120}$ fl. $= \frac{60}{7200}$ fl., $\frac{1}{3}$ kr. $= \frac{1}{80}$ fl. $= \frac{40}{7200}$ fl., und $\frac{1}{5}$ Häller $= \frac{1}{2400}$ fl. $= \frac{3}{7200}$ fl; es ist demnach der Bruch $\frac{1}{120}$ fl. $= \frac{60}{7200}$ fl. der größte Bruch, und $\frac{1}{5}$ Häller $= \frac{3}{7200}$ fl. der kleinste Bruch.

Die nämliche Vergleichung könnte man anstellen, wenn man die vorhandenen Brüche auf Kreutzer, oder Häller reduciren würde.

c) Wären die Ganzen, von welchen die Brüche gewiße Theile ausdrücken, ungleichartig (I. §. 78. c.), und könnten somit diese zu einander weder addirt, noch von einander subtrahirt werden, so kann auch die Frage nicht gestellt werden, welcher der gegebenen Brüche der größte ist, indem in dieser Voraussetzung die Brüche rücksichtlich ihres Werthes nicht mit einander verglichen werden können.

§. 20.

L) Brüche durch Annäherung zu verkleinern.

Auflösung:

Brüche durch Annäherung verkleinern heißt sie in andere Brüche verwandeln, die den gegebenen, was ihren Werth betrifft, zwar nicht nach aller Schärfe gleich sind, indeß aber doch, während die Zähler und Nenner kleinere Zahlen geworden sind, denselben so nahe kommen, daß das noch Fehlende als unbedeutend und verschwindend betrachtet werden kann. Um die Verkleinerung der Brüche in diesem Sinne vorzunehmen, sind nachstehende Regeln zu beobachten:

1) Ist der zu verkleinerende Bruch ein unächter Bruch (§. 3. b.), so dividire man allererst den

Zähler mit dem Nenner, um, wie man sich ausdrückt, dadurch die Ganzen aus dem Bruche herauszuziehen (§. 5. Zus. V.), und setze unter den Rest, den man als den Zähler des neuen Bruches betrachtet, den Nenner des vorigen Bruches wieder als Nenner. Der neue Bruch, den man auf diese Weise erhält, ist nun derjenige Bruch, der durch Annäherung zu verkleinern ist.

2) Man suche nach §. 12. das größte gemeine Maaß zum Zähler und Nenner dieses Bruches, und bezeichne sich aber jetzt die erhaltenen Quotienten der Ordnung nach mit den Buchstaben a, b, c, d, &c.

3) Findet man anstatt 1 eine andere Zahl als das größte gemeine Maaß, so dividire man damit den Zähler und Nenner des Bruches, um auf diese Weise den Bruch nach §. 13. auf die kleinste Benennung zu bringen. Nach diesem suche man nun wieder zum Zähler und Nenner dieses neuen Bruches das größte gemeine Maaß, welches, da dieselben relative Primzahlen (§. 10. e.) sind, die Zahl 1 seyn wird.

4) Hat man entweder gleich bey der ersten, oder aber bey der zweyten der eben erwähnten Berechnungen die Zahl 1 als das größte gemeine Maaß gefunden, so suche man sich folgende Brüche:

a) Um den ersten Bruch zu erhalten, schreibe man jederzeit 0 als Zähler, und 1 als Nenner, d. h. $\frac{0}{1}$;

b) um den zweyten Bruch zu erhalten, schreibe man immer 1 als Zähler, und den ersten Quotienten a als Nenner;

c) um den dritten Bruch zu erhalten, multiplicire man den Zähler und Nenner des zweyten Bruches mit dem zweyten Quotienten b, und setze das erste Product des Zählers in den Quotien-

ten, zu dem man den Zähler des ersten Bruches addirt, als den Zähler, und das zweyte Product des Nenners in den Quotienten, zu dem man den Nenner des ersten Bruches addirt, als den Nenner des dritten Bruches;

d) Auf eine ähnliche Weise verfahre man, um die folgenden Brüche, und zuletzt jenen Bruch selbst wieder zu erhalten, den man durch Annäherung verkleinern soll, indem man nämlich jederzeit den Zähler und Nenner des letzten Bruches mit den der Ordnung nach folgenden Quotienten multiplicirt, und zum ersten Producte (des Zählers in den Quotienten) den Zähler des unmittelbar vorhergehenden Bruches addirt, und diese Summe als den Zähler des neuen Bruches nimmt, während man dann, um auch den Nenner dieses neuen Bruches zu erhalten, zum zweyten Producte (des Nenners in den Quotienten) den Nenner des vorhergehenden Bruches addirt, und diese Summe als den Nenner des eben benannten neuen Bruches setzet.

5) Von den auf diese Weise erhaltenen Brüchen nehme man nun einen aus den mittleren als den gesuchten Bruch, weil die ersten Brüche dem Werthe nach von den gegebenen Brüchen noch zu viel abweichen, hingegen aber die letzten Brüche, welche sich denselben mehr näheren, schon wieder größere Zahlen zum Zähler und Nenner haben.

6) Um sich zu überzeugen, daß man so wirklich durch Annäherung einen neuen Bruch gefunden habe, der anstatt des gegebenen ohne bedeutenden Fehler angenommen werden kann, so bringe man diese beiden Brüche nach §. 18. unter einerley Benennung, und subtrahire den Zähler des kleineren Bruches von jenem des größeren, und schreibe unter den erhaltenen Rest, den man als Zähler nimmt, wieder den gemeinschaftlichen Nenner. Die auf diese Weise erhaltene Differenz der beiden

Brüche bestimmt, wie in dem folgenden Abschnitte gezeigt werden wird, um wie viel der eine Bruch größer ist, als der andere, und zeigt somit genau an, wie nahe man mittels der vorgenommenen Annäherung durch Annahme des neuen Bruches dem zu verkleinerenden Bruche gekommen ist.

I. Beyspiel.

Es sey der Bruch $\frac{360}{1155}$ durch Annäherung zu verkleinern.

Auflösung:

1) Man suche, wie dieses bereits im §. 12. geschehen ist, zu den beiden Zahlen 1155 und 360 das größte gemeine Maaß; man findet als dasselbe die Zahl 15.

2) Damit bringe man den Bruch $\frac{360}{1155}$ auf die kleinste Benennung, d. h. man verwandle ihn, indem man mit 15 den Zähler und Nenner dividirt, in den Bruch $\frac{24}{77}$, dessen Zähler 24, und Nenner 77 relative Primzahlen sind.

3) Nun suche man auf nachstehende Weise wieder zu den Zahlen 77 und 24 das größte gemeine Maaß, man wird 1 als dasselbe finden, bezeichne sich aber jetzt, was auch schon vorhin bey Nro. 1, und durchgehends bey der Auflösung dieser Aufgabe geschehen muß, die erhaltenen Quotienten der Ordnung nach mit den Buchstaben a, b, c, d, etc.

A = 77	a = 3	ist der Quotient der 1ten Division, oder der 1te Quotient.
B = 24		
72		
C = 5	b = 4	ist der Quotient der 2ten Division, oder der 2te Quotient.
20		
D = 4	c = 1	ist der Quotient der 3ten Division, oder der 3te Quotient.
4		
E = 1	d = 4	ist der Quotient der 4ten Division, oder der 4te und letzte Quotient.
4		
—		

4) Man setze jetzt, da man E = 1 als das größte gemeine Maaß gefunden hat, folgende Brüche an:

a) Als den ersten Bruch setze man $\frac{0}{1}$;

b) man setze 1 als Zähler, und den ersten Quotienten a = 3 als Nenner, man erhält als den zweyten Bruch $\frac{1}{3}$;

c) man multiplicire nun den Zähler und Nenner des zweyten Bruches $\frac{1}{3}$ mit dem zweyten Quotienten b = 4, und addire zum ersten Producte den Zähler, und zum zweyten den Nenner des ersten Bruches $\frac{0}{1}$, man erhält als den dritten Bruch $\frac{4}{13}$, weil $\frac{1 \cdot 4 + 0}{3 \cdot 4 + 1} = \frac{4}{13}$;

d) man multiplicire nun den Zähler und Nenner des dritten Bruches $\frac{4}{13}$ mit dem dritten Quotienten c = 1, und addire zum ersten Producte den Zähler, und zum zweyten den Nenner des zweyten Bruches $\frac{1}{3}$, man erhält als den vierten Bruch $\frac{5}{16}$, weil $\frac{4 \cdot 1 + 1}{13 \cdot 1 + 3} = \frac{5}{16}$;

e) endlich multiplicire man den Zähler und Nenner des vierten Bruches $\frac{5}{16}$ mit dem vierten und letzten Quotienten d = 4, und addire zum ersten Producte den Zähler, und zum zweyten den Nenner des dritten Bruches $\frac{4}{13}$, man erhält wieder den anfangs gegebenen Bruch $\frac{24}{77}$, als den fünften und letzten Bruch, weil $\frac{5 \cdot 4 + 4}{16 \cdot 4 + 13} = \frac{24}{77}$.

5) Von den auf diese Weise erhaltenen 5 Brüchen $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{5}{16}$ und $\frac{24}{77}$ kann man nun, im Falle die Aufgabe keine besondere Genauigkeit erfordert, anstatt des Bruches $\frac{24}{77}$ den Bruch $\frac{1}{3}$, oder aber, falls $\frac{1}{3}$ von dem Werthe des Bruches $\frac{24}{77}$ (welches jederzeit aus der vorliegenden Aufgabe selbst erkannt werden muß), noch zu viel abweichen würde, man nehme den Bruch $\frac{4}{13}$, oder endlich $\frac{5}{16}$, welcher letztere in diesem Beyspiele von den durch die Annäherung bestimmten Brüchen hinsichtlich des Werthes dem Bruche $\frac{24}{77}$ am nächsten kömmt; indem die Differenz zwischen $\frac{5}{16}$ und $\frac{24}{77}$ nur mehr $\frac{1}{1232}$ beträgt; da $\frac{5}{16} - \frac{24}{77} = \frac{5 \cdot 77}{16 \cdot 77} - \frac{24 \cdot 16}{77 \cdot 16}$ $= \frac{385}{1232} - \frac{384}{1232} = \frac{1}{1232}$ (I. §. 98.).

6) Wäre von einer solchen Aufgabe die Rede, wo auch der Fehler, der sich durch Annahme des Bruches $\frac{1}{16}$ ergiebt, noch bedeutend und namhaft wäre, so müßte der Bruch $\frac{24}{77}$ beybehalten werden. In diesem Falle darf die Verkleinerung durch die Annäherung nicht vorgenommen werden, und der Bruch $\frac{360}{1155}$ wird dann bloß auf die kleinste Benennung gebracht, indem man ihn, ohne auf irgend eine Weise seinen Werth zu verändern, in den Bruch $\frac{24}{77}$ verwandelt, da $\frac{360}{1155} = \frac{360 : 15}{1155 : 15} = \frac{24}{77}$.

II. Beyspiel.

Es sey der Bruch $\frac{121357}{674215}$ durch Annäherung zu verkleinern.

A) Erster Theil der Auflösung:

1) Der vorliegende Bruch ist ein ächter Bruch, weil der Zähler 121357 kleiner ist, als der Nenner 674215, man kann also hier keine Ganzen herausziehen.

2) Nach §. 12. suche man nun zum Zähler und Nenner dieses Bruches das größte gemeine Maaß, indem man den Nenner 674215 mit dem Buchstaben A, den Zähler 121357 mit B bezeichnet, und dann A = 674215 mit B = 121357 dividirt:

A = 674215	5 = a	ist der Quotient der 1ten Division, oder der erste Quotient.
B = 121357		
606785		
C = 67430		

3) Die erhaltenen Quotienten, wie dieses bereits bey dem ersten Quotienten, und dem Reste geschehen ist, bezeichne man der Ordnung nach mit den kleinen Buchstaben a, b, c etc., und die Reste mit den großen Buchstaben C, D, E etc. — Ferner dividire man nun den vorigen Divisor B = 121357 mit dem Reste C = 67430, man erhält:

B = 121357	1 = b	ist der Quotient der 2ten Division, oder der zweyte Quotient.
C = 67430		
67430		
D = 53927		

4) Den vorigen Divisor C = 67430 dividire man mit dem Reste D = 53927, man erhält:

C = 67430	1 = c ist der Quotient der
D = 53927	3ten Division, oder der
53927	dritte Quotient.
E = 13503	

5) Den vorigen Divisor D = 53927 dividire man mit dem Reste E = 13503, man erhält:

D = 53927	3 = d ist der Quotient der
E = 13503	4ten Division, oder der
40509	vierte Quotient.
F = 13418	

6) Den vorigen Divisor E = 13503 dividire man mit dem Reste F = 13418, man erhält:

E = 13503	1 = e ist der Quotient der
F = 13418	5ten Division, oder der
13418	fünfte Quotient.
G = 85	

7) Den vorigen Divisor F = 13418 dividire man mit dem Reste G = 85, man erhält:

F = 13418	157 = f ist der Quotient der
G = 85	6ten Division, oder der
85	sechste Quotient.
491	
G = 85	
425	
668	
G = 85	
595	
H = 73	

8) Den vorigen Divisor G = 85 dividire man mit dem Reste H = 73, man erhält:

G = 85	1 = g ist der Quotient der 7ten
H = 73	Division, oder der sie-
73	bente Quotient.
J = 12	

9) Den vorigen Divisor H = 73 dividire man mit dem Reste J = 12, man erhält:

H = 73	6 = h	ist der Quotient der 8ten Division, oder der achte Quotient.
J = 12		
72		
K = 1		

10) Endlich den vorigen Divisor J = 12 dividire man mit dem Reste K = 1, man erhält:

J = 12	12 = i	ist der Quotient der 9ten und letzten Division, oder der neunte und letzte Quotient.
K = 1		
2		
K = 1		
2		

11) Weil man hier die Zahl 1 als das größte gemeine Maaß gefunden hat (§. 12.), und die Zahl 1 nichts dividirt (I. §. 61. Zus. II.), so sind die bey diesem Bruche vorkommenden beiden Zahlen 121357, 674215 relative Primzahlen, und können somit ausser 1 durch keine andere Zahl ohne Rest getheilt werden

B) Zweyter Theil der Auflösung:

Man setze nun das Verfahren, um den gegebenen Bruch durch Annäherung zu verkleinern, auf folgende Weise fort:

1) Man setze als den ersten Bruch jenen, dessen Zähler 0, und der Nenner 1 ist, d. h., $\frac{0}{1}$ ist der erste Bruch.

2) Man setze den zweyten Bruch, dessen Zähler 1, und der Nenner der bey der ersten Division zum Vorscheine gekommene erste Quotient a = 5 ist, d. h., $\frac{1}{5}$ ist der zweyte Bruch.

3) Den Zähler, und Nenner dieses zweyten Bruches $\frac{1}{5}$ multiplicire man mit dem bey der zweyten Division zum Vorscheine gekommenen zweyten Quotienten b = 1, man erhält $\frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{1}{5}$, und addire zum Zähler dieses Bruches den Zähler des ersten Bruches $\frac{0}{1}$, und zum Nenner den Nen-

ner desselben, man erhält $\frac{1 + 0}{5 + 1} = \frac{1}{6}$ als den dritten Bruch.

4) Den Zähler und Nenner dieses Bruches $\frac{1}{6}$ multiplicire man mit dem dritten Quotienten $c = 1$, man erhält $\frac{1 \,.\, 1}{6 \,.\, 1} = \frac{1}{6}$, und addire zum Zähler dieses Bruches den Zähler des zweyten Bruches $\frac{1}{5}$, und zum Nenner den Nenner desselben, man erhält $\frac{1 + 1}{6 + 5} = \frac{2}{11}$ als den vierten Bruch.

5) Den Zähler und Nenner dieses Bruches $\frac{2}{11}$ multiplicire man mit dem vierten Quotienten $d = 3$, man erhält $\frac{2 \,.\, 3}{11 \,.\, 3} = \frac{6}{33}$, und addire zum Zähler dieses Bruches $\frac{6}{33}$ den Zähler des dritten Bruches, und zum Nenner den Nenner desselben, man erhält $\frac{6 + 1}{33 + 6} = \frac{7}{39}$ als den fünften Bruch.

6) Den Zähler und Nenner dieses Bruches $\frac{7}{39}$ multiplicire man mit dem fünften Quotienten $e = 1$, man erhält $\frac{7 \,.\, 1}{39 \,.\, 1} = \frac{7}{39}$, und addire zum Zähler dieses Bruches den Zähler des vierten Bruches $\frac{2}{11}$, und zum Nenner den Nenner desselben, man erhält $\frac{7 + 2}{39 + 11} = \frac{9}{50}$ als den sechsten Bruch.

7) Den Zähler und Nenner dieses Bruches $\frac{9}{50}$ multiplicire man mit dem sechsten Quotienten $f = 157$, man erhält $\frac{9 \,.\, 157}{50 \,.\, 157} = \frac{1413}{7850}$, und addire zum Zähler dieses Bruches den Zähler des fünften Bruches $\frac{7}{39}$, und zum Nenner den Nenner desselben, man erhält $\frac{1413 + 7}{7850 + 39} = \frac{1420}{7889}$ als den siebenten Bruch.

8) Den Zähler und Nenner dieses Bruches $\frac{1420}{7889}$ multiplicire man mit dem siebenten Quotienten $g = 1$, man erhält $\frac{1420 \,.\, 1}{7889 \,.\, 1} = \frac{1420}{7889}$, und addire zum Zähler dieses Bruches den Zähler des sechsten

Bruches $\frac{9}{50}$, und zum Nenner den Nenner desselben, man erhält $\frac{1420 + 9}{7889 + 50} = \frac{1429}{7939}$ als den achten Bruch.

9) Den Zähler und Nenner dieses Bruches $\frac{1429}{7939}$ multiplicire man mit dem achten Quotienten h = 6, man erhält $\frac{1429 \,.\, 6}{7939 \,.\, 6} = \frac{8574}{47634}$, und addire zum Zähler dieses Bruches den Zähler des siebenten Bruches $\frac{1420}{7889}$, und zum Nenner den Nenner desselben, man erhält $\frac{8574 + 1420}{47634 + 7889} = \frac{9994}{55523}$ als den neunten Bruch.

10) Endlich multiplicire man den Zähler und Nenner dieses Bruches $\frac{9994}{55523}$ mit dem neunten und letzten Quotienten i = 12, man erhält $\frac{9994 \,.\, 12}{55523 \,.\, 12} = \frac{119928}{666276}$, und addire zum Zähler dieses Bruches den Zähler des achten Bruches $\frac{1429}{7939}$, und zum Nenner den Nenner desselben, man erhält $\frac{119928 + 1429}{666276 + 7939} = \frac{121357}{674215}$ als den zehenten und zugleich letzten Bruch, welcher nun wieder der nämliche anfangs gegebene Bruch ist, den man durch die Annäherung verkleinern will.

C) Dritter Theil der Auflösung.:

1) Von den auf diese Weise erhaltenen 10 Brüchen $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{7}{39}$, $\frac{9}{50}$, $\frac{1420}{7889}$, $\frac{1429}{7939}$, $\frac{9994}{55523}$, $\frac{121357}{674215}$ kömmt der sechste Bruch $\frac{9}{50}$, dessen Zähler und Nenner kleine Zahlen sind, dem Werthe nach dem gegebenen Bruche $\frac{121357}{674215}$ schon sehr nahe, und kann also anstatt desselben genommen werden.

2) Nimmt man den Bruch $\frac{9}{50}$ wirklich anstatt des durch Annäherung zu verkleinernden Bruches $\frac{121357}{674215}$, so untersuche man nun, um wie viel jener von diesem abweicht, indem man, wie dieses im vorigen Beyspiele geschehen ist, beide nach §. 18. a. unter einerley Benennung bringt, dann den Zähler des kleineren Bruches von jenem des größeren subtrahirt, und unter diesen Rest, den man zum Zähler nimmt,

wieder den vorigen gemeinschaftlichen Nenner setzet. Auf diese Weise erhält man $\frac{1}{396597\frac{1}{17}}$ zur Differenz; indem $\frac{9}{50} - \frac{121357}{674215} = \frac{9\ .\ 674215}{50\ .\ 674215} - \frac{121357\ .\ 50}{674215\ .\ 50}$ $= \frac{6067935}{33710750} - \frac{6067850}{33710750} = \frac{85}{33710750} = \frac{85\ :\ 85}{33710750\ :\ 85}$ $\frac{1}{396597\frac{1}{17}}$ (I. §. 98)

3) Es kann demnach anstatt des gegebenen Bruches $\frac{121357}{674215}$ der durch Annäherung bestimmte Bruch $\frac{9}{50}$ sicher rücksichtlich vieler Aufgaben ohne einen bedeutenden Fehler angenommen werden, indem die Differenz $\frac{1}{396597\frac{1}{17}}$ so klein ist, daß sie beynahe nur den 396597sten Theil jenes Ganzen beträgt, von welchem in der vorkommenden Aufgabe die Rede ist.

Anmerkung: 1) Ich habe bey diesem letzten Beyspiele, als ich zu den Zahlen 121357, 674215 das größte gemeine Maaß durch den ersten Theil A. der Auflösung suchte, nur der Deutlichkeit wegen die Divisionen von einander getrennt, und jedesmal wieder den Dividend und Divisor auf's neue angeschrieben. Bey den gewöhnlichen Auflösungen dieser Aufgabe schreibe man, wie ich es ebenfalls im ersten Beyspiele gethan habe, die Dividenden, Divisoren, und Reste, wie auch rechts neben hin die Quotienten, der Ordnung nach gleich unmittelbar unter einander.

2) Bey Auflösung dieser Aufgabe wurde verlangt, man solle die Quotienten der Ordnung nach mit den Buchstaben a, b, c, &c. bezeichnen, weil man jene zur Bildung der neuen Brüche nöthig hat, welches bey der Aufgabe C. des §. 12., wo man nur das größte gemeine Maaß zweyer gegebenen Zahlen suchen wollte, nicht der Fall war.

3) Man gebe wohl acht, daß man nicht gleich jeden Rest, wenn man nämlich das größte gemeine Maaß sucht, mit einem neuen Buchstaben bezeichne. Dieses darf allezeit nur bey jenem Reste geschehen, der zuletzt übrig bleibt, wenn im Dividend oben kein Ziffer mehr vorkömmt, das zum Reste herabgesetzt werden könnte. Ein Beyspiel hierüber hat man beym ersten Theile A. der Auflösung des zweyten Beyspiels Nro. 7, wo der Quotient f = 157 aus mehreren Ziffern besteht, und somit nur der letzte Rest 73 mit dem Buchstaben H. bezeichnet werden durfte.

4) Setzt man wirklich immerhin die Division so lange fort, bis man die Zahl 1 als das größte gemeine Maaß findet, so ist man in den Stand versetzet, auch alle jene neuen Brüche zu finden, in welche der gegebene Bruch durch Annäherung verwandelt werden kann, und sieht sich für seine Mühe dadurch belohnt, daß dieser nämliche Bruch als der letzte wieder zum Vorscheine kömmt. Auf diese Weise dient sich gleich die erste Berechnung zur Probe. — Würde man die Division nicht so lange fortsetzen, so wäre dann die Division etwa da abzubrechen, wo man nämlich bemerken würde, daß die Zähler und Nenner der Brüche wieder merklich größere Zahlen werden.

5) Bey Brüchen, derer Zähler und Nenner schon kleinere Zahlen sind, ist diese Verkleinerung in den mehresten Fällen nicht anwendbar, weil man da leicht durch Annahme eines neuen Bruches einen namhaften Fehler begehen könnte. Indeß, wie ich es schon bemerkte, muß man jederzeit aus der vorliegenden Aufgabe selbst ermessen, ob und in wie ferne die angegebene Annäherung vorgenommen werden dürfe. Bey Brüchen, derer Zähler und Nenner sehr große Zahlen sind, ist dieselbe von anerkannten Vortheilen; indem solche Brüche sehr mühsam zu schreiben, und auszusprechen sind, während es sehr schwer ist, sich von denselben, wenn nämlich das Ganze in sehr viele gleiche Theile zu theilen ist, und diese zugleich sehr oft zu nehmen sind, eine deutliche Vorstellung zu machen.

6) Endlich ist diese Aufgabe allerdings schwer. Sie konnte aber ihrer Wichtigkeit wegen nicht umgangen werden. Man wende, was ich in Absicht einer jeden Aufgabe bemerkt haben will, die gegebenen Regeln gleich Schritt vor Schritt in den zu diesem Behufe denselben beygefügten, und ausgearbeiteten Beyspielen an, und man wird dieselben auch wirklich nach und nach verstehen.

§. 21.

Die Probe in Absicht auf die bisher in diesem Abschnitte berührten Aufgaben.

1) Bey der Aufgabe A. des §. 8. ist die ganze Zahl 6 in den Bruch $\frac{6}{1}$, dann die Zahl 6 in den Bruch $\frac{24}{4}$ verwandelt worden. Zur Probe ziehe man aus diesen Brüchen, indem man den Zähler mit dem Nenner dividirt, die Ganzen heraus, man erhält wieder 6, oder $\frac{6}{1} = 6$, und $\frac{24}{4} = 6$.

2)

2) Bey der Aufgabe B. des §. 9. a. hat man den Bruch $^3/_4$ in den Bruch $^{45}/_{60}$ verwandelt. — Zur Probe dividire man nach §. 13. den Zähler und Nenner des Bruches mit 15, man erhält wieder $^3/_4$, oder $^{45}/_{60} = \frac{45 : 15}{60 : 15} = {}^3/_4$.

3) Bey der Aufgabe C. des §. 12. hat man zu den Zahlen 360 und 1155 als das größte gemeine Maaß die Zahl 15 gefunden. — Zur Probe dividire man 360 und 1155 mit 15, man wird finden, daß kein Rest bleibt, und somit 15 wirklich ein gemeines Maaß ist; daß 15 aber zugleich auch das größte gemeine Maaß ist, muß aus dem Beweise, der hier nicht vorgetragen werden konnte, erkannt werden.

4) Bey der Aufgabe D. des §. 13. hat man durch Verkleinerung die Brüche $^{50}/_{100}$, $^8/_{12}$, $^{24}/_{39}$, $^{360}/_{1155}$ in die Brüche $^1/_2$, $^4/_6$, $^8/_{13}$, $^{24}/_{77}$ verwandelt. — Zur Probe multiplicire man den Zähler und Nenner dieser letzteren mit dem gebrauchten gemeinen, oder größten gemeinen Maaße, so erhält man die vorigen Brüche $^{50}/_{100}$, $^8/_{12}$, $^{24}/_{39}$, $^{360}/_{1155}$ wieder, oder $^1/_2 = \frac{1 . 50}{2 . 50} = {}^{50}/_{100}$, $^4/_6 = \frac{4 . 2}{6 . 2} = {}^8/_{12}$, $^8/_{13} = \frac{8 . 3}{13 . 3} = {}^{24}/_{39}$, $^{24}/_{77} = \frac{24 . 15}{77 . 15} = {}^{360}/_{1155}$.

5) Bey der Aufgabe E. des §. 14. hat man den Werth der Brüche $^8/_4$ fl., $^3/_4$ fl. ꝛc. in ganzen Zahlen ausgedrückt, und gefunden, daß $^8/_4$ fl. = 2 fl., $^3/_4$ fl. = 45 kr. sind. — Zur Probe mache man die ganze Zahl 2 nach §. 8. b. wieder zu einem Bruche mit dem Nenner 4, und 45 kr. reducire man nach §. 15. auf Gulden, man erhält wieder 2 fl. = $^8/_4$ fl., und 45 kr. = $^{45}/_{60}$ fl. = $^3/_4$ fl. ꝛc.

6) Bey der Aufgabe F. des §. 15. hat man 15 kr., $^2/_3$ kr. auf Gulden, und $^1/_2$ Quintl auf Centner reducirt, und gefunden, daß 15 kr. = $^1/_4$ fl., $^2/_3$ kr. = $^1/_{90}$ fl., und $^1/_2$ Quintl = $^1/_{25600}$ Ctn. — Zur Probe reducire man nach §. 14. die Brüche $^1/_4$ fl., und $^1/_{90}$ fl. auf Kreutzer, und den Bruch $^1/_{25600}$ Ctn. auf Quintl, man muß wieder die vorigen Brüche erhalten, oder

$^1/_4$ fl. = 15 kr., $^1/_{90}$ fl. = $^2/_3$ kr., und $^1/_{25600}$ Ctn. = $^1/_2$ Quintl.

7) Bey der Aufgabe G. des §. 16. hat man die Zahl 840 gefunden. — Zur Probe dividire man dieselbe durch alle Nenner der gegebenen Brüche, man wird bey diesen Divisionen keinen Rest bekommen, d. h., 840 : 6 = 140, 840 : 7 = 120 ꝛc. Daß aber 840 unter allen Zahlen, die durch diese Nenner theilbar sind, die möglichst kleinste Zahl ist, kann, was auch in Betreff der Aufgabe J. des §. 18. bemerkt werden muß, nur aus dem Beweise, der hier nicht vorgetragen werden kann, erkannt werden.

8) Bey der Aufgabe H. des §. 17. hat man die Brüche der Spalte A Q in jene der Spalte O P, nämlich $^5/_6$ in $^{700}/_{840}$, $^2/_7$ in $^{240}/_{840}$ ꝛc. verwandelt. — Zur Probe dividire man der Ordnung nach die Zähler und Nenner der Brüche der Spalte O P mit den Quotienten der Spalte B D, man muß wieder die anfangs da gewesenen Brüche der Spalte A Q erhalten; oder $^{700}/_{840} = \frac{700\,:\,140}{840\,:\,140} = {}^5/_6$, $^{240}/_{840} = \frac{240\,:\,120}{840\,:\,120} = {}^2/_7$ ꝛc.

9) Bey der Aufgabe J. des §. 18. hat man die Brüche unter einerley Benennung gebracht. — Zur Probe dividire man, wenn man nach der Regel a. verfahren ist, den Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit dem Producte der übrigen Nenner, und man muß die anfangs gegebenen Brüche wieder erhalten. Ist man aber nach der bey b. angeführten Regel verfahren, so dividire man mit dem nämlichen Quotienten, mit welchem man bey Umwandlung der Brüche den Zähler und Nenner eines jeden Bruches multiplicirte, diese beiden wieder, und es müssen abermal die vorigen Brüche zum Vorscheine kommen.

10) Bey der Aufgabe K des §. 19. verwandle man die neuen Brüche $^{60}/_{7200}$ fl., $^{40}/_{7200}$ fl., und $^5/_{7200}$ fl. in die vorigen, man muß wieder die gegebenen Brüche $^1/_{120}$ fl., $^1/_3$ kr. und $^1/_5$ Häller erhalten.

11) In Absicht auf die Probe der Aufgabe L des §. 20. ist das Benöthigte in diesem §. schon bemerkt worden.

§. 22.

Wiederholung in Fragen.

1) Was ist eine gebrochene Zahl, oder ein Bruch, — wodurch unterscheidet sich dieser von einer ganzen Zahl, — und was will z. B. dieses sagen „$\frac{5}{6}$ fl.“ ?

2) Was heißt man Nenner und Zähler des Bruches, — und welches Zeichen wird unter dem Bruchzeichen verstanden?

3) Woher kommen die Ausdrücke „Bruch oder gebrochene Zahl, ferner Zähler und Nenner des Bruches?“

4) Welche Brüche heißt man ächte, und unächte, ferner einfache, und zusammengesetzte, endlich gemeine oder allgemeine Brüche — Brüche überhaupt, und welche werden Decimal- und Sexagesimal- Brüche genannt?

5) Aus welchem Grunde kann man den Zähler als Dividend, den Nenner des Bruches als Divisor, und den Bruch selbst als jenen Quotienten betrachten, welchen man erhält, wenn man den Zähler mit dem Nenner dividirt?

6) Welche Veränderungen können bey den Brüchen, ohne ihren Werth zu verändern, durch die Multiplication oder Division vorgenommen werden?

7) Nach welcher Regel wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, oder dividirt?

8) Wie kann man den Werth eines Bruches, der Theile eines bestimmten Ganzen ausdrückt, in Einheiten niederer Ordnung angeben?

9) Wie kann man ganze Zahlen, oder Brüche in Brüche von einem bestimmten Nenner verwandeln?

10) Was heißt dieses, Brüche auf eine kleinere, oder aber auf die kleinste Benennung bringen; — nach welcher Regel werden die Brüche auf eine kleinere, oder auf die kleinste Benennung gebracht?

11) Welchen Vortheil verschafft man sich durch

die Verkleinerung der Brüche, und welchen Vortheil gewähret dieses, daß man Brüche durch Annäherung in andere verwandelt?

12) Was heißt dieses, Brüche auf einerley Benennung bringen, und wie ist die Sache anzugehen, wenn man sie auf einerley, und zugleich die kleinste Benennung bringen will?

13) Wie werden bey unächten Brüchen die Ganzen herausgezogen, und auf was hat man achtzugeben, wenn man den Werth eines gegebenen Bruches erkennen will?

14) Wie kann man bey mehreren Brüchen erkennen, welcher der kleinste oder der größte Bruch ist?

15) Welche Zahlen werden Primzahlen, und zusammengesetzte, ferner relative Primzahlen, und zusammengesetzte Zahlen unter sich genannt, — und welche Zahlen heißt man ein Maaß, ferner ein gemeines Maaß, und endlich das größte gemeine Maaß anderer Zahlen?

16) Wann lassen sich gegebene Zahlen mit 2, 5, 10, 4, 8, 3 und 9 ohne Rest theilen?

§. 23.

Beyspiele zur Uebung.

I.

Wie viele Ganze enthalten nachstehende unächte Brüche in sich „$^{12}/_{5}$, $^{24}/_{8}$, $^{3480}/_{430}$, $^{17320}/_{1400}$, $^{23578}/_{1000}$“?

II.

Welche Producte erhält man, wenn man $^{5}/_{8}$ mit 6, $^{12}/_{13}$ mit 8, $^{128}/_{219}$ mit 11 multiplicirt, und welche Quotienten kommen zum Vorscheine, wenn man $^{5}/_{12}$ mit 5, $^{7}/_{8}$ mit 9, $^{24}/_{25}$ mit 12, und $^{48}/_{49}$ mit 6 dividirt?

III.

Man verwandle die Ganzen 6, 8, 12 in Brüche, die den Nenner 5 haben, wie auch die Ganzen 13, 17, 19 in solche Brüche, die einen beliebigen Nenner haben.

IV.

Man verwandle die Brüche $^3/_7$, $^5/_6$, $^3/_5$, $^{10}/_{13}$ in solche Brüche, die alle den Nenner 100 haben.

V.

Welches ist das größte gemeine Maaß der beiden Zahlen 124 und 850, wie auch der beiden Zahlen 113 und 219?

VI.

Man bringe die Brüche $^{124}/_{896}$, $^{128}/_{28536}$, $^{84}/_{124}$, $^{1235}/_{3755}$, $^{64240}/_{78200}$, $^{7653}/_{8466}$ auf eine kleinere, und die Brüche $^{160}/_{720}$, $^{1920}/_{4320}$, $^{414}/_{805}$ und $^{71}/_{89}$ auf die kleinste Benennung.

VII.

Was betragen nachstehende Brüche, wenn man ihren Werth in Einheiten niederer Ordnung ausdrückt: $^{117}/_{328}$ fl., $^{119}/_{210}$ Centner und $^{325}/_{798}$ Pfund (baier. Handelsgewicht), $^5/_6$ Tag, $^3/_7$ Jahr, $^5/_{10}$ Ballen (Papier), $^3/_{64}$ baier. Schäffel Korn, $^5/_6$ baier. Metzen Gersten, $^5/_{12}$ baier. Chaussee-Meilen, $^7/_8$ baier. Fuß sowohl im Duodecimal- als auch Decimal-Maaße, $^7/_8$ Monat, $^5/_{24}$ baier. Eimer (zu 60 Maß gerechnet), $^9/_{360}$ einer Kreislinie?

VIII.

Welche Resultate erhält man, wenn man folgende niedere Einheiten auf höhere reducirt, als: 7 Häller auf Gulden, 3 Zoll (im baier. Decimalmaaße) auf Klafter (als Längenmaaß zu 6 Fuß gerechnet), 5 Secunden auf Tage, 3 Quintl auf Centner (im baier. Handelsgewichte), 15 Bogen Schreibpapier auf Riß, 5 Achterl (baier. Getränkmaaß) auf Maße, 20480 baier. Quadratfuß auf baier. Tagwerke, 1438 Kubiklinien (baier. Körpermaaß nach der Decimaleintheilung) auf Kubikfuß, $^3/_4$ halbe Dreyßger Waizen (baier. Getraid-Maaß) auf Schäffel, $^5/_6$ Richtpfenning (baier. Münzgewicht) auf Mark, $^5/_8$ Stunden auf Jahre, $^{12}/_{13}$ Gran (baier. Apothekergewicht) auf Unzen?

IX.

Man bringe nachstehende Brüche auf einerley, und zugleich die kleinste Benennung: $^1/_2$, $^2/_3$, $^4/_6$, $^7/_{12}$,

$^{5}/_{8}$, $^{5}/_{24}$, $^{11}/_{48}$, ferner auch diese: $^{5}/_{10}$, $^{24}/_{100}$, $^{18}/_{10000}$, $^{3428}/_{100000}$, $^{789}/_{1000}$, und endlich auch diese Brüche: $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{2}/_{5}$, $^{5}/_{6}$, $^{7}/_{8}$, $^{1}/_{15}$, $^{3}/_{16}$, $^{19}/_{20}$, $^{11}/_{24}$, $^{13}/_{32}$, $^{19}/_{48}$.

X.

Wenn nachstehende Brüche Theile eines und des nämlichen Ganzen ausdrücken, welcher von denselben ist dem Werthe nach der größte, und welcher der kleinste: $^{13}/_{15}$, $^{7}/_{9}$, $^{128}/_{349}$, und $^{1000}/_{1119}$; — ferner welcher von den folgenden Brüchen ist seinem Werthe nach der kleinste, und welcher der größte: $^{2}/_{3}$ Quintl, $^{3}/_{17}$ Loth, $^{4}/_{117}$ Pfund, $^{3}/_{1418}$ Centner im baier. Handelsgewichte?

XI.

Nach Angabe des Herrn Professors Prändel mißt der Peißenberg in Oberbaiern 12170 Pariser Fuß. Was giebt dieser ungefähr für einen Meilenbruch, da 22826 Pariser Fuß eine baier. Meile geben, und somit die Höhe dieses Berges $^{12170}/_{22826}$ Meilen beträgt?

XII.

Zufolge einiger Berechnungen beträgt das trockene Land ungefähr 3'059.675, hingegen aber die ganze Oberfläche unseres Erdkörpers gegen 9'281.520 Quadratmeilen; welchen Theil macht demnach das feste Land von der ganzen Oberfläche der Erde ungefähr aus, wenn man nämlich den Bruch $^{3059675}/_{9281520}$ eben so, wie jenen der vorigen Aufgabe, mittels der Annäherung verkleinert?

II. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit den gemeinen Brüchen, oder mit den Brüchen überhaupt.

I.

Die Addition der gemeinen Brüche, oder der Brüche überhaupt.

§. 24.

Regel der Addition für jenen Fall, wo den Brüchen keine Ganzen beygefügt sind.

Ungemischte — bloße Brüche, d. h., solche Brüche, welchen keine Ganzen, entweder mittels des Additionszeichens oder aber ohne ein Zeichen, beygefügt sind, werden auf folgende Weise addirt:

a) Haben die Brüche ungleiche Nenner, so bringe man sie unter einerley Benennung, d. h., man verwandle sie, ohne ihren Werth zu verändern, nach Vorschrift des §. 18. in solche Brüche, die alle den nämlichen Nenner haben.

b) Haben die Brüche gleiche Nenner, so addire man (I. §. 28.) alle ihre Zähler zusammen, und nehme diese Summe als den Zähler, hingegen aber ihren gemeinschaftlichen Nenner als den Nenner jenes Bruches, der die verlangte Summe ausdrückt. Ist diese Summe ein unächter Bruch (§. 3. b.), so ziehe man zugleich nach §. 5. Zus. V., indem man den Zähler mit dem Nenner dividirt, die Ganzen heraus, welchen man dann den Rest, wie er mit dem vorigen Nenner dividirt

werden soll, in der Gestalt eines neuen Bruches beysetzt.

c) Würden die Brüche Theile ungleichnamiger, indessen aber doch gleichartiger Ganzen ausdrücken, so müßte man sie vorhin nach §. 14. oder §. 15. reduciren, und dadurch ohne Veränderung ihres Werthes in solche Brüche verwandeln, die alle Theile eines und des nämlichen Ganzen ausdrücken. Hat man aber einmal solche Brüche, so behandle man sie nach den so eben bey a und b gegebenen Vorschriften, um ihre Summe zu finden.

d) Würden aber die Brüche Theile von ungleichartigen Größen (I. §. 78. c.) ausdrücken, die als solche nie in eine Summe gebracht werden können, so kann bey solchen Brüchen die wirkliche Addition nicht Statt finden; indem es bey ungleichartigen Größen nicht möglich ist, eine solche Größe zu finden, die denselben zusammen genommen gleich, und somit ihre Summe wäre.

Anmerkung: Was in der Folge in der Buchstaben-Rechnung unter ungleichartigen Größen verstanden wird, und in welchem Sinne dieselben addirt werden können, wird am gehörigen Orte erwähnet werden.

§. 25.

Anwendung dieser Regeln.

I. Beyspiel:

Es seyen die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, welche Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, zu addiren.

Auflösung:

1) Weil diese Brüche Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, und sie zugleich den nämlichen Nenner haben, so addire man alle ihre Zähler, man erhält 15, indem $1 + 3 + 5 + 6 = 15$.

2) Diese erhaltene Summe 15 setze man als Zäh-

ler, und den General- — gemeinschaftlichen Nenner 4 als den Nenner jenes Bruches, der die verlangte Summe ausdrückt, man erhält den Bruch $^{15}/_{4}$, der eben so groß ist, als die gegebenen Brüche zusammen genommen.

3) Weil dieser Bruch $^{15}/_{4}$ ein unächter Bruch ist, so ziehe man auch die Ganzen heraus, man erhält 3 und $^{3}/_{4}$, oder anstatt $3 + {}^{3}/_{4}$ schreibe man $3\,^{3}/_{4}$, indem hier eben so das Wörtchen „und" wie das Additionszeichen (+) weggelassen werden kann.

Man hat daher zum Resultate gefunden, daß $^{1}/_{4} + {}^{3}/_{4} + {}^{5}/_{4} + {}^{6}/_{4} = \frac{1 + 3 + 5 + 6}{4} = {}^{15}/_{4} = 3\,^{3}/_{4}$, und somit $3\,^{3}/_{4}$ die verlangte Summe dieser Brüche ist.

II. Beyspiel:

Es seyen die Brüche, welche Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, als $^{5}/_{6}$, $^{2}/_{7}$, $^{5}/_{12}$, $^{7}/_{8}$, $^{11}/_{15}$, $^{4}/_{21}$, $^{1}/_{14}$ und $^{3}/_{10}$ zu addiren.

Auflösung:

1) Weil diese Brüche verschiedene Nenner haben, so bringe man sie nach §. 18. b. auf einerley und zugleich die kleinste Benennung. Es läßt sich hier der größte Nenner 21 nicht ohne Rest durch alle übrigen Nenner theilen, und man weiß auch nicht gleich zum voraus eine Zahl, die durch alle Nenner ohne Rest theilbar wäre; um deswillen suche man nach §. 16., was in diesem §. hinsichtlich der in dieser Aufgabe vorkommenden Brüche schon geschehen ist, die möglichst kleinste Zahl, die durch alle Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest theilbar.

2) Die auf diese Weise gefundene Zahl 840 nehme man als gemeinschaftlichen Nenner, und suche nun nach §. 17., was ebenfalls in diesem §. rücksichtlich dieser Brüche schon ausgeführt worden ist, die Zähler der neuen Brüche, welche in der Spalte C F dieses §. vorkommen, wobey es nicht nothwendig ist, daß man auch die in dem nämlichen §. in den Spalten

M N, O P und S R vorkommenden Brüche anschreibt.

3) Die in der eben erwähnten Spalte C F der Ordnung nach unter einander geschriebenen Zähler der neuen Brüche, in welche man die gegebenen Brüche verwandelte, addire man nach I. §. 28. zusammen, man erhält zur Summe 3113.

4) Diese Zahl 3113 nehme man als Zähler, und den General-Nenner als den Nenner jenes Bruches, der die gesuchte Summe ausdrückt, man erhält $^{3113}/_{840}$.

5) Weil dieser Bruch ein unächter Bruch ist, so ziehe man nach §. 5. Zus. V. die Ganzen heraus, man erhält, daß $^{3113}/_{840} = 3\ ^{593}/_{840}$; weßhalb nun $^{5}/_{6} + ^{2}/_{7} + ^{5}/_{12} + ^{7}/_{8} + ^{11}/_{15} + ^{4}/_{21} + ^{1}/_{14} + ^{3}/_{10}$

$$= \frac{700 + 240 + 350 + 735 + 616 + 160 + 60 + 252}{840}$$

$= ^{3113}/_{840} = 3\ ^{593}/_{840}$, und somit $3\ ^{593}/_{840}$ die verlangte Summe der gegebenen Brüche ist.

III. Beyspiel:

Es seyen die Brüche ½ fl., ⅔ kr. und ¾ Häll. zu addiren.

Auflösung:

1) Diese Brüche drücken Theile von ungleichnamigen, indessen aber doch gleichartigen Ganzen aus, die durch das Reduciren gleichnamig gemacht werden können.

2) Man reducire nun entweder nach §. 14. oder nach §. 15. die Brüche so, daß sie Theile des nämlichen Ganzen — entweder von einem Gulden, oder Kreutzer, oder aber Häller ausdrücken.

3) Diese Brüche bringe man nun unter einerley Benennung, und addire sie auf die angegebene Weise, um so die verlangte Summe derselben zu finden.

Reducirt man die beiden Brüche ⅔ kr., und ¾ Häller auf Gulden, so erhält man, daß ⅔ kr. = $^{1}/_{90}$

fl., und $\frac{3}{4}$ Häll. $= \frac{1}{640}$ fl.; daher ist nun $\frac{1}{2}$ fl. $+ \frac{2}{3}$ kr. $+ \frac{3}{4}$ Häll. $= \frac{1}{2}$ fl. $+ \frac{1}{90}$ fl. $+ \frac{1}{640}$ fl. $= \frac{2880}{5760}$ fl. $+ \frac{64}{5760}$ fl. $+ \frac{9}{5760}$ fl. $= \frac{2953}{5760}$ fl. $= 30$ kr. $6\frac{1}{12}$ Häll.

Reducirt man aber, was in diesem Beyspiele bequemer ist, die Brüche $\frac{1}{2}$ fl., und $\frac{3}{4}$ Häll. auf Kreuzer, so erhält man, daß $\frac{1}{2}$ fl. $= 30$ kr., und $\frac{3}{4}$ Häll. $= \frac{3}{32}$ kr.; daher ist nun $\frac{1}{2}$ fl. $+ \frac{2}{3}$ kr. $+ \frac{3}{4}$ Häll. $= 30$ kr. $+ \frac{2}{3}$ kr. $+ \frac{3}{32}$ kr. $= 30\frac{73}{96}$ kr. $= 30$ kr. $6\frac{1}{12}$ Häll.

§. 26.

Regel der Addition für jene Fälle, wo den Brüchen ganze Zahlen beygefügt sind.

Gemischte Brüche, d. h., solche Brüche, welchen ganze Zahlen mittels des Additionszeichens, oder, wie es gewöhnlich ist, ohne ein Zeichen beygefügt sind, werden auf folgende Weise addirt:

1) Addire man allerst die Brüche nach §. 24, indem sie Einheiten niederer Ordnung ausdrücken.

2) Ist die Summe aller bey den gegebenen Summanden vorkommenden Brüche ein unächter Bruch, so ziehe man nach §. 5. Zus. V. die Ganzen heraus.

3) Die auf diese Weise erhaltenen Ganzen zähle man zu den gegebenen Ganzen, welche nach I. §. 28. ebenfalls in eine Summe gebracht werden.

4) Den ächten Bruch, den man entweder gleich anfangs, oder aber dadurch erhält, daß man bey dem unächten die Ganzen herauszieht, hänge man der Summe der Ganzen zur rechten Seite an, wodurch man dann sowohl die gegebenen Ganzen, als auch die denselben angehängten Brüche in eine Summe gebracht hat.

Beyspiel:

Es seyen nachstehende Summanden, die alle gleichartige und zugleich gleichnamige Ganze ausdrücken, in eine Summe zu bringen, als: 3048 $^5/_6$, 428 $^2/_7$, 10405 $^5/_{12}$, 100 $^7/_8$, 14 $^{11}/_{15}$, 458 $^4/_{21}$, 678 $^1/_{14}$, und 99804 $^3/_{10}$.

Auflösung:

1) Zufolge der beym II. Beyspiele §. 25. angegebenen Auflösung ist die Summe dieser Brüche = 3 $^{593}/_{840}$.

2) Sobald man die Brüche zusammengezählt hat, so addire man die ganzen Zahlen, man erhält als die Summe derselben die Zahl 114935, und addire die bey den Brüchen erhaltenen 3 Ganzen dazu, man erhält 114938

3) Diesen Ganzen hänge man den bey der Addition der Brüche herausgekommenen neuen Bruch $^{593}/_{840}$ an, man erhält als die verlangte Summe die Zahl 114938 $^{593}/_{840}$, oder 3048 $^5/_6$ + 428 $^2/_7$ + 10405 $^5/_{12}$ + 100 $^7/_8$ + 14 $^{11}/_{15}$ + 458 $^4/_{21}$ + 678 $^1/_{14}$ + 99804 $^3/_{10}$ = 114938 $^{593}/_{840}$.

§. 27.

Beweis, die in den §§. 24. 26. aufgestellten Regeln betreffend.

1) Damit die Brüche addirt werden können, müssen sie Theile eines und des nämlichen Ganzen ausdrücken, und zugleich unter einerley Benennung gebracht seyn.

2) Sind jene Ganzen, von welchen die Brüche gewiße Theile ausdrücken, genannt, und drücken somit die Brüche nicht überhaupt Theile von Ganzen aus, so lasse man die Benennung der Ganzen weg. Solche Brüche betrachte man nun dadurch wie benannte Zahlen, daß man bloß die Zähler mit jener Benennung anschreibt, der ihnen vermöge des gemeinschaftlichen Nenners zukömmt.

3) Dieselben werden also dadurch wirklich addirt,

daß man bloß die Zähler addirt, und unter diese Summe den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner schreibt, indem auf diese Weise die Summe mit den Summanden Theile der nämlichen Benennung ausdrückt.

4) Sind den Brüchen ganze Zahlen beygefügt, so drücken sie Einheiten niederer, hingegen aber die Ganzen Einheiten höherer Ordnung aus.

Man addire also zuerst (I. §. 96.) die Brüche, und dann die Ganzen. Ist die erstere Summe ein unächter Bruch, so ist der Nenner die Reductionszahl, mit der man dividiren muß, um die niederen Einheiten auf die höheren zu reduciren (I. §. 90. B.), indem jederzeit so viele Theile zu nehmen sind, als der Nenner Einheiten ausdrückt, um ein Ganzes zu erhalten (§. 3. b.).

Im I. Beyspiele des §. 25. hat man die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ addirt, und zur Summe die Zahl $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ erhalten. Nun ist aber $\frac{1}{4} = 1$ Viertel, $\frac{3}{4} = 3$ Viertel, $\frac{5}{4} = 5$ Viertel, und $\frac{6}{4} = 6$ Viertel (§. 2. a.), also ist auch $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} = 15$ Viertel (I. §. 96.).

Ferner $\frac{4}{4} = 1$, oder 4 Viertel geben ein Ganzes, weil hier das Ganze in 4 gleiche Theile getheilt wird, und also diese zusammen das Ganze wieder geben (I. §. 10. Nro. 2.), man erhält also so viele Ganze, als oft 4 Viertel von 15 Viertel weggenommen werden können; wie oft aber 4 Viertel in 15 Viertel enthalten sind, mithin davon weggenommen werden können, dieses erkennt man durch die Division, kraft welcher man zum Resultate erhält, daß 15 Viertel mit 4 Viertel dividirt zum Quotienten $3\frac{3}{4}$ geben. Daher ist nun die verlangte Summe dieser gegebenen Brüche $3\frac{3}{4}$, oder $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} = 1$ Viertel $+ 3$ Viertel $+ 5$ Viertel $+ 6$ Viertel $= 15$ Viertel $= 3$ Ganzen 3 Viertel $= 3\frac{3}{4}$.

§. 28.

Aufgabe, die Brüche einzurichten.

Gemischte Brüche werden eingerichtet, wenn

man sie, ohne ihren Werth zu verändern, in bloße Brüche verwandelt, welches geschieht, wenn man die denselben beygefügten Ganzen ebenfalls in Brüche von dem nämlichen Nenner verwandelt, und dann die Brüche durch Addition in eine Summe bringt.

Das Einrichten der Brüche ist im Grunde ein Reduciren, weil dadurch die Ganzen auf Einheiten niederer Ordnung, auf jene nämlich, welche der Bruch kraft seines Nenners ausdrückt, reducirt werden.

Bey Einrichtung der Brüche ist folgende Regel zu beobachten:

1) Man multiplicire die Ganzen mit dem Nenner des angehängten Bruches.

2) Zu diesem Producte addire man den Zähler des nämlichen Bruches, und nehme diese Summe als Zähler, hingegen aber den nämlichen Nenner als Nenner jenes Bruches, in welchen der gegebene gemischte Bruch verwandelt wird.

Man soll z. B. den Bruch $3\,^4/_5$ einrichten. Man multiplicire also 3 mit 5, zum Producte 15 addire man 4, nehme die Summe 19 als Zähler und 5 als Nenner des neuen Bruches, man erhält, daß $3\,^5/_4 = {}^{19}/_5$, wodurch nun der Bruch auf die verlangte Weise eingerichtet worden ist.

Grund des Verfahrens:

1) Indem man der so eben aufgestellten Regel gemäß verfährt, hat man 3 in einen Bruch mit dem Nenner 5 verwandelt, und $^{15}/_5$ erhalten (§. 9.).

2) $^{15}/_5$ und $^4/_5$ geben zur Summe $^{19}/_5$ (§. 24.); es ist also dadurch, daß man den gegebenen gemischten Bruch $3\,^4/_5$ in den Bruch $^{19}/_5$, dem keine Ganzen mehr angehängt sind, verwandelte, der Werth desselben nicht verändert worden.

II.

Die Subtraction der gemeinen Brüche, oder der Brüche überhaupt.

§. 29.

Regel der Subtraction für jenen Fall, wo bloß ein Bruch von einem anderen zu subtrahiren ist.

a) Wenn die Brüche ungleiche Nenner haben, und Theile von gleichartigen und gleichnamigen Ganzen ausdrücken, so bringe man sie allererst unter einerley Benennung.

b) Haben solche Brüche gleiche Nenner, so subtrahire man den Zähler des Subtrahends von jenem des Minuends, setze diesen Rest als den Zähler, und den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner jenes Bruches, der die verlangte Differenz der beiden anfangs gegebenen Brüche ausdrückt.

c) Drücken die Brüche Theile von gleichartigen, aber ungleichnamigen Ganzen aus, so reducire man sie nach §. 14. oder §. 15. so, daß sie Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, und subtrahire dann den Subtrahend vom Minuend auf die eben angegebene Weise.

d) Drücken endlich die Brüche Theile von ungleichartigen Ganzen aus, so kann aus dem so eben bey der Addition angegebenen Grunde die Subtraction nicht Statt finden.

I. Beyspiel:

Es sey vom Bruche $^3/_4$ der Bruch $^2/_3$ zu subtrahiren, wenn vorausgesetzt wird, daß diese Brüche Theile von gleichartigen und gleichnamigen Ganzen ausdrücken.

Auflösung:

1) Man bringe die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ unter einerley Benennung, man erhält $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$.

2) Den Zähler des Subtrahends subtrahire man vom Zähler des Minuends, somit 8 von 9, die erhaltene Differenz 1 setze man als Zähler, und den Nenner 12 als Nenner des neuen Bruches, man erhält zum Reste $\frac{1}{12}$, weßhalb nun $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$.

II. Beyspiel:

Von $\frac{1}{90}$ fl. subtrahire man $\frac{1}{4}$ kr.

Auflösung:

1) Man reducire entweder $\frac{1}{90}$ fl. auf Kreutzer, oder aber $\frac{1}{4}$ kr. auf Gulden, im ersten Falle erhält man, daß $\frac{1}{90}$ fl. $= \frac{2}{3}$ kr.

2) Von $\frac{2}{3}$ kr. subtrahire man $\frac{1}{4}$ kr., oder was eines ist, von $\frac{2}{3}$ subtrahire man $\frac{1}{4}$, man erhält, daß $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$, daher ist nun $\frac{2}{3}$ kr. $- \frac{1}{4}$ kr. $= \frac{5}{12}$ kr., und eben deßwegen auch $\frac{1}{90}$ fl. $- \frac{1}{4}$ kr. $= \frac{5}{12}$ kr., d. h., wenn man von $\frac{1}{90}$ fl. den Bruch $\frac{1}{4}$ kr. subtrahirt, so erhält man zum Reste $\frac{5}{12}$ kr.

Ganz auf die nämliche Weise verfährt man, wenn man den Bruch $\frac{1}{4}$ kr. auf Gulden reducirt, und dann die Subtraction vornimmt.

§. 30

Regel der Subtraction für jenen Fall, wo ein Bruch von einer ganzen Zahl zu subtrahiren ist.

a) Ist der Subtrahend ein ächter Bruch, und drückt dieser Theile von jenen Ganzen aus, die in dem Minuend vorkommen, so entlehne man vom Minuend 1, d. h., ein Ganzes, mache es nach §. 9. zu einem Bruche mit dem nämlichen Nenner, den der Subtrahend hat, und verrichte

nun

nun die Subtraction. Weil im Subtrahend keine Ganzen vorkommen, so hänge man, um die verlangte Differenz zu finden, diesen neuen Bruch dem um 1 verminderten Minuend an.

b) Ist der Subtrahend in diesem Falle ein unächter Bruch, so ziehe man nach §. 5. Zus. V. die Ganzen heraus, und subtrahire nun den erhaltenen neuen Bruch von dem Minuend, der hier eine ganze Zahl ist.

Zu diesem Zwecke entlehne man ebenfalls vom Minuend 1, und mache diese ganze Zahl zu einem Bruche mit dem nämlichen Nenner, den der Subtrahend hat (§. 9.).

Nach §. 29. verrichte man nun die Subtraction bey diesen beiden Brüchen, subtrahire dann auch die etwa im Subtrahend vorkommende ganze Zahl von jener des Minuends, und setze diesem Reste jenen Bruch bey, den man als die Differenz der beiden eben erwähnten Brüche gefunden hat.

I. Beyspiel:

Von 1 soll der Bruch $\frac{7}{8}$ subtrahirt werden.

Auflösung:

1) Man mache 1 zu einem Bruche mit dem Nenner 8, man erhält $\frac{8}{8}$.

2) Davon subtrahire man $\frac{7}{8}$, man erhält $\frac{1}{8}$, daher ist $1 - \frac{7}{8} = \frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$, d. h., wenn man $\frac{7}{8}$ von 1 subtrahirt, so erhält man zum Reste $\frac{1}{8}$.

II. Beyspiel:

Von 824 soll $\frac{28}{5}$ subtrahirt werden.

Auflösung:

1) Aus dem Bruche $\frac{28}{5}$ ziehe man die Ganzen heraus, man erhält, daß $\frac{28}{5} = 5\,\frac{3}{5}$.

2) Man entlehne 1 von 824, und mache es zu ei-

nem Bruche mit dem Nenner 5, man erhält $^5/_5$, und ziehe davon $^3/_5$ ab, man erhält zum Reste $^2/_5$.

3) Ferner ziehe man auch 5 von 823 ab, man erhält zum Reste 818; weßwegen nun $818^2/_5$ als die verlangte Differenz gefunden wird; indem $^{28}/_5 = 5^3/_5$, und somit $824 - ^{28}/_5 = 824 - 5^3/_5 = 823^5/_5 - 5^3/_5 = 818^2/_5$.

§. 31.
Regel der Subtraction, wenn ein gemischter Bruch von einem gemischten Bruche zu subtrahiren ist.

1) Man bringe die den Ganzen angehängten Brüche unter einerley Benennung, und subtrahire jenen Bruch, welcher im Subtrahend vorkömmt, von demjenigen, welcher im Minuend der ganzen Zahl angehängt ist.

2) Ist in diesem Falle der Subtrahend größer, als der Minuend, und kann man somit nicht subtrahiren, so entlehne man von der ganzen Zahl des Minuends 1, d. h., ein Ganzes, mache es so zu einem Bruche, daß es mit dem Subtrahend den nämlichen Nenner hat, und subtrahire nun diesen von dem neuen Bruche, der an die Stelle des Minuends kömmt.

3) Dann subtrahire man auch die Ganzen des Subtrahends von jenen des Minuends, und setze diesem Reste jenen bey, den man bey der Subtraction der Brüche erhielt, man hat dadurch die verlangte Differenz der beiden gegebenen gemischten Brüche gefunden.

4) Wären die den Ganzen angehängten Brüche unächte Brüche, so müßte man allererst die Ganzen herausziehen, diese zu den gegebenen Ganzen addiren, und dann auf die eben angegebene Weise verfahren.

I. Beyspiel:

Man soll von 1058 $\frac{4}{5}$ die Zahl 459 $\frac{2}{7}$ subtrahiren.

Auflösung:

1) Man untersuche, ob man $\frac{2}{7}$ von $\frac{4}{5}$ subtrahiren kann, indem man diese Brüche unter einerley Benennung bringt, und subtrahire dann, im Falle es angeht, wirklich, man erhält, daß $\frac{4}{5} - \frac{2}{7} = \frac{28}{35} - \frac{10}{35} = \frac{18}{35}$.

2) Man subtrahire nun auch die Ganzen, man erhält 599, indem 1058 — 459 = 599.

3) Zu diesem Reste setze man den vorigen, man erhält 599 $\frac{18}{35}$, oder 1058 $\frac{4}{5}$ — 459 $\frac{2}{7}$ = 599 $\frac{18}{35}$.

II. Beyspiel:

Man soll von 48728 $\frac{1}{3}$ die Zahl 36598 $\frac{5}{12}$

Auflösung:

1) Man untersuche, ob $\frac{5}{12}$ von $\frac{1}{3}$ abgezogen werden kann, indem man beide Brüche unter einerley Benennung bringt; man erhält, daß $\frac{1}{3} - \frac{5}{12} = \frac{12}{36} - \frac{15}{36}$.

2) Weil man hier nicht subtrahiren kann, so entlehne man vom Minuend 1, d. h., ein Ganzes, addire dieses, nachdem man es vorhin zu einem Bruche mit dem Nenner 36 gemacht hat, zu dem Bruche $\frac{12}{36}$, man erhält, daß $1 + \frac{12}{36} = \frac{36}{36} + \frac{12}{36} = \frac{48}{36}$, weßwegen $1\frac{12}{36} = \frac{48}{36}$, und $\frac{48}{36} - \frac{15}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.

3) Man subtrahire nun auch die Ganzen von einander, es ist 48727 — 36598 = 12129; weil man vom Minuend 48728 die Zahl 1 entlehnte, so wird bey der wirklichen Subtraction anstatt dieses Minuends die Zahl 48727 angeschrieben.

4) Zu diesem Reste setze man den vorigen, man erhält 12129 $\frac{11}{12}$, oder 48728 $\frac{1}{3}$ — 36598 $\frac{5}{12}$ = = 12129 $\frac{11}{12}$.

III. Beyspiel:

Von 458 $\frac{9}{4}$ sey 318 $\frac{17}{8}$ zu subtrahiren.

Auflösung:

1) Man verwandle die unächten Brüche in ächte (§. 5. Zus. V.), und addire die erhaltenen Ganzen zu den bey den Brüchen stehenden Ganzen. Es ist $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, und $\frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$, daher ist $458\frac{9}{4} = 460\frac{1}{4}$, und $318\frac{17}{8} = 320\frac{1}{8}$.

2) Den gemischten Bruch $320\frac{1}{8}$ subtrahire man nun auf die eben angegebene Weise von dem gemischten Bruche $460\frac{1}{4}$, man erhält zum Reste $140\frac{1}{8}$, oder $458\frac{9}{4} - 318\frac{17}{8} = 460\frac{1}{4} - 320\frac{1}{8} = 140\frac{1}{8}$.

Der Grund des Verfahrens ist aus dem ersichtlich, was im §. 27. in Absicht auf die Addition der Brüche gesagt wurde.

§. 32.

Regel der Subtraction für jene Fälle, wo entweder der Minuend, oder der Subtrahend, oder aber beide zugleich aus mehreren Theilen bestehen.

1) In diesem Falle addire man auf eine ähnliche Weise, wie bey den ganzen Zahlen (I. §. 37, a, b und c) alle Theile des Minuends, indem man sowohl alle bey demselben vorkommenden Brüche, als auch die Ganzen in eine Summe bringt.

2) Eben so verfahre man auch bey den Theilen des Subtrahends, und subtrahire die zweyte Summe vor der ersten.

Beyspiel:

Der Minuend bestehe aus den Zahlen $428\frac{1}{6}$, $636\frac{5}{6}$, $789\frac{5}{9}$, und der Subtrahend aus den Zahlen $48\frac{1}{2}$, $96\frac{3}{4}$, $104\frac{7}{8}$; welchen Rest erhält man nun, wenn man die Subtraction wirklich vornimmt?

Auflösung:

1) Nach §. 26. addire man alle Theile des Minuends, man erhält $1854\frac{13}{18}$, indem $428\frac{1}{6} + 636\frac{5}{6} + 789\frac{5}{9} = 1854\frac{13}{18}$.

2) Eben so addire man alle Theile des Subtra-

hends, man erhält $250\frac{1}{8}$, indem $48\frac{1}{2} + 96\frac{3}{4} + 104\frac{7}{8} = 250\frac{1}{8}$.

3) Nach §. 31. subtrahire man nun $250\frac{1}{8}$ von $1854\frac{13}{18}$, man erhält zum verlangten Reste $1604\frac{43}{72}$, daher hat man gefunden, daß $(428\frac{1}{3} + 636\frac{5}{6} + 789\frac{5}{9}) - (48\frac{1}{2} + 96\frac{3}{4} + 104\frac{7}{8}) = 1854\frac{13}{18} - 250\frac{1}{8} = 1604\frac{43}{72}$.

III.

Die Multiplication der gemeinen Brüche, oder der Brüche überhaupt.

§. 33.

Regel der Multiplication für jenen Fall, wo bloß Brüche mit einander zu multipliciren sind.

1) Man multiplicire den Zähler des Multiplicands mit dem Zähler des Multiplicators, und auch den Nenner des Multiplicands mit jenem des Multiplicators.

2) Das Product der beiden Zähler setze man als Zähler, und das Product der beiden Nenner als Nenner jenes Bruches, der das verlangte Product der beiden gegebenen Brüche ausdrückt.

Kürzer wird diese Regel so ausgedrückt:

Man multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, setze das erste Product als Zähler, und das zweyte als Nenner jenes Bruches, der das gesuchte Product ausdrückt.

Beyspiel:

Es soll $\frac{5}{7}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt werden.

Auflösung:

1) Man multiplicire 5 mit 2, man erhält 10, und 7 mit 3, man erhält 21.

2) Das erste Product 10 nehme man als Zähler, und das zweyte Product 21 als Nenner jenes Bru-

ches, der das verlangte Product ist, man erhält $^{10}/_{21}$, d. h., $^5/_7 \times ^2/_3 = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = ^{10}/_{21}$.

Grund des Verfahrens:

1) $^5/_7$ mit $^2/_3$ multipliciren heißt eben so viel, als von $^5/_7$ den 3ten Theil 2mal nehmen (I. §. 45. a.), indem der Bruch $^2/_3$ ausdrückt, daß der dritte Theil zweymal genommen werden müsse (§. 2.).

2) Von $^5/_7$ erhält man den dritten Theil, wenn man diesen Bruch mit 3 dividirt.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man damit entweder den Zähler dividirt, oder aber den Nenner multiplicirt (§. 6. B.), daher ist $^5/_7 : 3 = \frac{5}{7 \cdot 3} = ^5/_{21}$.

4) Dieser dritte Theil von $^5/_7$ muß kraft des Zählers des Multiplicators 2mal genommen werden, weßwegen man $^5/_{21}$ mit 2 multipliciren muß; es ist aber $^5/_{21} \times 2 = \frac{5 \cdot 2}{21} = ^{10}/_{21}$ (§. 6. A.), daher ist $^5/_7$ multiplicirt mit $^2/_3$ gleich $^{10}/_{21}$, und man erhält der aufgestellten Regel gemäß wirklich das verlangte Product.

Was von diesem Producte erwiesen wurde, gilt offenbar für jedes Product, das man erhält, wenn man Brüche mit einander multiplicirt; indem die mittels der citirten §§. angeführten Gründe auf alle Brüche anwendbar sind.

§. 34.

Lehrsatz:

Auch bey Brüchen darf man die Stellen der Factoren verwechseln, d. h., man erhält das nämliche Product, wenn man den Multiplicand an die Stelle des Multiplicators, und diesen an die Stelle des Multiplicands setzt.

Beweis:

1) Bey ganzen Zahlen kann man die Stellen der Factoren verwechseln (I. §. 49.)

2) Werden Brüche mit Brüchen multiplicirt, so wer-

den ihre Zähler, und ebenfalls ihre Nenner mit einander multiplicirt (§. 33.), es geben also diese, wenn man ihre Stellen verwechselt, die nämlichen Producte.

3) Daher kann man auch bey den Brüchen die Stellen der Factoren verwechseln.

4) Ist einer der Factoren eine ganze Zahl, oder ein gemischter Bruch, oder aber sind beide gemischte Brüche, so mache man die ganze Zahl nach §. 8. a. zu einem Bruche, und die gemischten Brüche richte man nach §. 28. ein; man hat wieder die Aufgabe, daß ein Bruch mit einem anderen zu multipliciren ist, weßhalb man auch in diesen letzteren Fällen die Stellen der Factoren verwechseln kann.

Man hat z. B. im vorigen §. $^5/_7$ mit $^2/_3$ multiplicirt, und zum Producte $^{10}/_{21}$ erhalten; es ist aber $5 \times 2 = 2 \times 5 = 10$, und $7 \times 3 = 3 \times 7 = 21$, daher ist auch $^5/_7 \times {}^2/_3 = {}^2/_3 \times {}^5/_7$, und $^2/_3$ multiplicirt mit $^5/_7$ giebt ebenfalls zum Producte $^{10}/_{21}$, oder

$$\begin{array}{ccc} 5 \times 2 & = & 2 \times 5 \\ 7 \times 3 & = & 3 \times 7 \end{array}$$

daher ist $\frac{5 \,.\, 2}{7 \,.\, 3} = \frac{2 \,.\, 5}{3 \,.\, 7}$ (I. §. 62. I.)

und so $^5/_7 \times {}^2/_3 = {}^2/_3 \times {}^5/_7 = {}^{10}/_{21}$.

§. 35.

Regel der Multiplication, wenn einer der Factoren eine ganze Zahl, und der andere Factor ein ungemischter Bruch ist.

a) Ist der Multiplicand ein Bruch, so mache man entweder den Multiplicator ebenfalls zu einem Bruche, indem man 1 als Nenner unter denselben schreibt, und multiplicire dann die beiden Brüche nach §. 33. mit einander, oder aber, was bequemer ist, und in vielen zum Producte schon einen verkleinerten Bruch giebt, man verfahre nach §. 6. A.

b) Ist der Multiplicand eine ganze Zahl, so verwandle man entweder die ganze Zahl in einen Bruch, und multiplicire dann die Brüche mit ein-

ander, oder man verwechsle die Stellen der Factoren, und bringe die im §. 6. A. aufgestellte Regel in Anwendung.

I. Beyspiel:

Es sey $^5/_6$ mit 3 zu multipliciren.

Auflösung:

1) 3 ist gleich $^3/_1$; oder $3 = {}^3/_1$, daher ist $^5/_6 \times 3 = {}^5/_6 \times {}^3/_1 = {}^{15}/_6 = 2\,{}^3/_6 = 2\,{}^1/_2$.

2) Verfährt man hingegen nach §. 6. A., so erhält man zum Producte ebenfalls $2\,{}^1/_2$, indem $^5/_6 \times 3 = \frac{5\,.\,3}{6} = {}^{15}/_6 = 2\,{}^1/_2$; oder $^5/_6 \times 3 = \frac{5}{6\,:\,3} = {}^5/_2 = 2\,{}^1/_2$.

II. Beyspiel:

Es sey 8 mit $^5/_7$ zu multipliciren.

Auflösung:

1) Man mache 8 zu einem Bruche mit dem Nenner 1, man erhält $^8/_1$, daher ist $8 \times {}^5/_7 = {}^8/_1 \times {}^5/_7 = {}^{40}/_7 = 5\,{}^5/_7$.

2) Oder aber man verwechsle die Stellen der Factoren, und verfahre nach §. 6. A., man erhält zum Producte ebenfalls $5\,{}^5/_7$, indem $8 \times {}^5/_7 = {}^5/_7 \times 8 = {}^{40}/_7 = 5\,{}^5/_7$.

§. 36.

Regel der Multiplication für jene Fälle, wo ein Factor ein gemischter Bruch, und der andere eine ganze Zahl ist.

1) Den gemischten Bruch nehme man als Multiplicand, und die ganze Zahl als Multiplicator.

2) Man multiplicire nun zuerst den Bruch, welcher Einheiten niederer Ordnung ausdrückt, und dann die ganze Zahl des Multiplicands.

3) Erhält man bey der ersten Multiplication einen unächten Bruch, so ziehe man aus diesem die Ganzen heraus, und addire diese zu den Ganzen.

4) Zu der dadurch erhaltenen Summe setze man jenen Bruch, der etwa, wenn man die Ganzen herauszieht, zum Vorscheine kömmt, und man hat das verlangte Product gefunden.

Der Grund des Verfahrens liegt darin, weil der gemischte Bruch eine Summe der Ganzen, und des angehängten Bruches ist, und, indem alle Theile zusammen das Ganze geben, eine Summe eben dadurch multiplicirt wird, daß man alle Summanden, welche zusammen die Summe geben, mit einander multiplicirt.

Man könnte auch den gemischten Bruch nach §. 28. einrichten, und dann nach §. 6. A. die Multiplication vornehmen. Indessen ist es aber bequemer, wenn man auf die eben angegebene Weise verfährt.

Beyspiel:

Es soll 8 mit $6\,^5/_7$ multiplicirt werden.

Auflösung:

1) Man nehme $6\,^5/_7$ zum Multiplicand und multiplicire zuerst den Bruch $^5/_7$, und dann die ganze Zahl 6 mit dem Multiplicator 8, man erhält $^{40}/_7$, und 48. Aus dem unächten Bruche $^{40}/_7$ ziehe man die Ganzen heraus, man erhält $5\,^5/_7$, und addire die Zahl 5 zu 48, man erhält 53, daher hat man zum verlangten Producte $53\,^5/_7$ gefunden, oder $8 \times 6\,^5/_7 = 6\,^5/_7 \times 8 = 48\,^{40}/_7 = 53\,^5/_7$; indem $6\,^5/_7 = 6 + {}^5/_7$, und also $6\,^5/_7 \times 8 = (6 + {}^5/_7) \times 8 = 48 + {}^{40}/_7 = 48 + 5\,^5/_7 = 53 + {}^5/_7 = 53\,^5/_7$, oder

$$\begin{array}{l} 6\,^5/_7 = 6 + 5 \text{ Siebentel} \\ 8 \quad = 8 \\ \hline \end{array}$$

also ist $6\,^5/_7 \times 8 = (6 + 5$ Siebentel$) \times 8$; es ist aber $(6 + 5$ Siebentel$) \times 8 = 48 + 40$ Siebentel $= 48 + {}^{40}/_7 = 48 + 5\,^5/_7 = 53\,^5/_7$, daher ist auch $6\,^5/_7 \times 8 = 53\,^5/_7$.

§. 37.

Regel der Multiplication für jene Fälle, wo beide Factoren gemischte Brüche sind.

1) Man richte beide Brüche nach §. 28. ein,

und verwandle sie dadurch der äußern Form nach in ungemischte Brüche.

2) Diese ungemischten Brüche multiplicire man nun nach §. 33. mit einander.

3) Aus dem Producte, welches ein unächter Bruch ist, ziehe man die Ganzen nach §. 5. Zus. V. heraus.

Beyspiel:

Es sey $8\,^3/_7$ mit $9\,^3/_4$ zu multipliciren.

Auflösung:

1) In diesem Beyspiele ist es immer gleich, welcher dieser beiden Brüche als Multiplicand genommen wird; in anderen Beyspielen nehme man etwa jenen Bruch als Multiplicand, dem die größere ganze Zahl beygefügt ist.

2) Man richte die Brüche ein, multiplicire sie auf die bekannte Weise mit einander, und ziehe dann aus dem Producte die Ganzen heraus, man erhält zum verlangten Resultate $82\,^5/_{28}$; indem $8\,^3/_7 = {^{59}/_7}$, $9\,^3/_4 = {^{39}/_4}$, daher ist auch $8\,^3/_7 \times 9\,^3/_4 = {^{59}/_7} \times {^{39}/_4} = {^{2301}/_{28}} = 82\,^5/_{28}$.

§. 38.

Regel der Multiplication für jene Fälle, wo mehr als 2 Factoren vorkommen.

Sind mehrere gemischte und ungemischte Brüche unter sich, oder mit ganzen Zahlen zu multipliciren, so verfahre man nach folgenden Regeln:

a. 1) Weil man die Stellen der Factoren sowohl bey den ganzen Zahlen, als auch bey den Brüchen verwechseln darf (§. 34. und I. §. 49.), so nehme man zur ersten Multiplication aus den gegebenen Factoren zwey beliebige, und multiplicire sie den bisher aufgestellten Regeln gemäß mit einander.

2) Das erhaltene Product multiplicire man

mit einem neuen Factor, dieses Product multiplicire man wieder mit einem der übrigen Factoren, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man auf eine ähnliche Weise, wie dieses bey den ganzen Zahlen (I. §. 57.) geschehen ist, alle vorkommenden Factoren mit einander multiplicirt hat.

3) Ist das zuletzt erhaltene Product ein unächter Bruch, so ziehe man nach §. 5. Zus. V. die Ganzen heraus.

Dagegen kann man in diesem Falle auch auf nachstehende Weise das verlangte Product finden:

b. 1) Man richte die vorkommenden gemischten Brüche ein, und mache die ganzen Zahlen zu Brüchen, indem man 1 als Nenner darunter schreibt, um so alle Factoren in ungemischte Brüche zu verwandeln.

2) Nach der im I. Theile im §. 57. aufgestellten Regel multiplicire man alle Zähler, und dann ebenfalls alle Nenner mit einander, setze das Product der Zähler als Zähler, und das Product der Nenner als Nenner jenes Bruches, der das verlangte Product ausdrückt.

3) Ist dieses Product ein unächter Bruch, so ziehe man die Ganzen heraus.

Aus der vorliegenden Aufgabe wird man ersehen, durch welche Verfahrungsweise das verlangte Resultat geschwinder gefunden wird.

I. Beyspiel:

Man suche jenes Product, das man erhält, wenn man den Bruch $^2/_3$ fünfmal als Factor setzt.

Auflösung:

Man multiplicire $^2/_3$ mit $^2/_3$, man erhält $^4/_9$, ferner $^4/_9$ mit $^2/_3$, man erhält $^8/_{27}$, dann $^8/_{27}$ mit $^2/_3$,

maner hält $^{16}/_{81}$, endlich $^{16}/_{81}$ mit $^2/_3$, man erhält als das verlangte Product $^{32}/_{243}$, oder $^2/_3 \times {}^2/_3 = {}^4/_9$, $^4/_9 \times {}^2/_3 = {}^8/_{27}$, $^8/_{27} \times {}^2/_3 = {}^{16}/_{81}$, und $^{16}/_{81} \times {}^2/_3 = {}^{32}/_{243}$, daher ist $^2/_3 \times {}^2/_3 \times {}^2/_3 \times {}^2/_3 \times {}^2/_3 = {}^{32}/_{243}$.

Oder aber nach der zweyten hier aufgestellten Regel setze man 2 fünfmal als Factor, man erhält 32, indem $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, und dann setze man 3 fünfmal als Factor, es ist $3 \times 3 \times 3$ $3 \times 3 = 243$, daher ist nun $^{32}/_{243}$ das verlangte Product.

II. Beyspiel:

Man multiplicire die Brüche $2\,^1/_2$, $3\,^2/_5$, $4\,^5/_7$ mit einander.

Auflösung:

1) Man multiplicire zwey dieser Factoren mit einander, und das Product mit dem dritten noch übrigen Factor. Es ist $2\,^1/_2 \times 3\,^2/_5 = {}^5/_2 \times {}^{17}/_5 = {}^{85}/_{10}$, ferner $^{85}/_{10} \times 4\,^5/_7 = {}^{85}/_{10} \times {}^{33}/_7 = {}^{2805}/_{70} = 40\,^1/_{14}$, daher ist $2\,^1/_2 \times 3\,^2/_5 \times 4\,^5/_7 = 40\,^1/_{14}$.

2) Oder aber man richte diese Brüche ein, und verfahre den gegebenen Vorschriften gemäß, man erhält wieder das nämliche Product $40\,^1/_{14}$; indem $2\,^1/_2 \times 3\,^2/_5 \times 4\,^5/_7 = {}^5/_2 \times {}^{17}/_5 \times {}^{33}/_7 = {}^{2805}/_{70} = 40\,^5/_{70} = 40\,^1/_{14}$.

III. Beyspiel:

Es seyen die Zahlen $3\,^1/_2$, $^5/_6$, 4, und $4\,^1/_3$ mit einander zu multipliciren.

Auflösung:

1) Verfährt man nach der bey a. gegebenen Vorschrift, so erhält man zum Producte $50\,^5/_9$; indem $3\,^1/_2 \times {}^5/_6 = {}^7/_2 \times {}^5/_6 = {}^{35}/_{12}$, ferner $^{35}/_{12} \times 4 = \frac{35\,.\,4}{12} = {}^{140}/_{12}$, oder einfacher $^{35}/_{12} \times 4 = \frac{35}{12\,:\,4} = {}^{35}/_3$, und endlich $^{35}/_3 \times 4\,^1/_3 = {}^{35}/_3 \times {}^{13}/_3 = {}^{455}/_9 = 50\,^5/_9$, daher ist $3\,^1/_2 \times {}^5/_6 \times 4 \times 4\,^1/_3 = 50\,^5/_9$.

2) Verfährt man hingegen nach der bey b. gegebenen Vorschrift, so erhält man das nämliche Product, indem $3\,{}^1\!/_2 \times {}^5\!/_6 \times 4 \times 4\,{}^1\!/_8 = {}^7\!/_2 \times {}^5\!/_6 \times {}^4\!/_1 \times {}^{13}\!/_8 = {}^{1820}\!/_{36} = 50\,{}^{20}\!/_{36} = 50\,{}^5\!/_9$.

IV.

Die Division der gemeinen Brüche, oder der Brüche überhaupt.

§. 39.

Regel der Division für jene Fälle, wo ein ungemischter Bruch mit einem ungemischten zu dividiren ist.

1) Man multiplicire den Zähler des Dividends mit dem Nenner des Divisors;

2) Man multiplicire den Zähler des Divisors mit dem Nenner des Dividends;

3) Das erste Product setze man als Zähler, und das zweyte als Nenner jenes Bruches, der den verlangten Quotienten ausdrückt.

Beyspiel:

Es sey ${}^3\!/_4$ mit ${}^2\!/_7$ zu dividiren.

Auflösung:

1) Man multiplicire 3 mit 7, man erhält 21, und 2 mit 4, man erhält 8.

2) 21 nehme man als Zähler, und 8 als Nenner jenes Bruches, der den verlangten Quotienten ausdrückt, man erhält ${}^{21}\!/_8 = 2\,{}^5\!/_8$, oder ${}^3\!/_4 : {}^2\!/_7 = \frac{3.7}{2.4} = {}^{21}\!/_8 = 2\,{}^5\!/_8$.

Grund des Verfahrens:

1) Bringt man die beyden Brüche ${}^3\!/_4$, ${}^2\!/_7$ unter einerley Benennung, und betrachtet man sie dann als benannte Zahlen, so erhält man den nämlichen Quotienten, wenn man den Dividend und Divisor mit

der nämlichen Zahl multiplicirt (I. §. 64.), es bleibt also auch der Quotient unverändert, wenn man, ohne die Brüche unter einerley Benennung zu bringen, gleich unmittelbar beide mit der Zahl 7, welche der Nenner des Divisors ist, multiplicirt. Es ist aber $\frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4}$, und $\frac{2}{7} \times 7 = \frac{14}{7} = \frac{2}{1} = 2$; daher ist auch $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{21}{4} : 2$.

2) Ein Bruch wird nach §. 6. B. mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man damit entweder den Zähler dividirt, oder aber den Nenner multiplicirt; deßwegen ist $\frac{21}{4} : 2 = \frac{21}{8}$. Die Zahl $\frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$ ist also wirklich der gesuchte Quotient, und somit $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 4} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$.

3) Daß die Zahl $2\frac{5}{8}$ wirklich der gesuchte Quotient ist, erhellet auch daraus, weil $\frac{2}{7}$ mit $2\frac{5}{8}$ multiplicirt den Dividend $\frac{3}{4}$ wieder giebt, indem $\frac{2}{7} \times 2\frac{5}{8} = \frac{2}{7} \times \frac{21}{8} = \frac{42}{56} = \frac{3}{4}$, und eine Zahl mit einer anderen Zahl dividiren eben so viel heißt, als jene Zahl finden, welche anzeigt, wie oft der Divisor im Dividend enthalten ist, oder wie oft der Divisor gesetzt werden muß, um den Dividend wieder zu erhalten.

§. 40.

Regel der Division für jene Fälle, wo entweder der Divisor eine ganze Zahl, und der Dididend ein ungemischter Bruch, oder aber der Divisor ein ungemischter Bruch, und der Dividend eine ganze Zahl ist.

a) Ist der Dividend ein ungemischter Bruch, und der Divisor eine ganze Zahl, so dividire man nach §. 6. B., indem man mit der ganzen Zahl entweder den Zähler dividirt, oder aber damit den Nenner des Bruches multiplicirt.

b) Ist aber der Dividend eine ganze Zahl, so schreibe man 1 darunter, und mache ihn dadurch

zu einem Bruche; dann dividire man nach der im vorigen §. aufgestellten Regel.

I. Beyspiel:

Es sey $^{12}/_{13}$ mit 3 zu dividiren.

Auflösung:

Entweder dividire man den Zähler 12 mit 3, und lasse dann den Nenner unverändert, oder aber man multiplicire den Nenner 13 mit 3, und lasse dann den Zähler unverändert. Es ist $^{12}/_{13} : 3 = \frac{12 : 3}{13} = {}^{4}/_{13}$, oder $^{12}/_{13} : 3 = \frac{12}{13 . 3} = {}^{12}/_{39} = {}^{4}/_{13}$.

II. Beyspiel:

Es sey 4 mit $^{5}/_{6}$ zu dividiren.

Auflösung:

Man mache 4 zu einem Bruche, indem man 1 als Nenner darunter schreibt, und dividire nun $^{4}/_{1}$ mit $^{5}/_{6}$, man erhält zum Quotienten $^{24}/_{5} = 4\,^{4}/_{5}$, oder $4 : {}^{5}/_{6} = {}^{4}/_{1} : {}^{5}/_{6} = \frac{4 . 6}{5 . 1} = {}^{24}/_{5} = 4\,^{4}/_{5}$.

§. 41.

Regel der Division für jene Fälle, wo der Dividend, oder der Divisor, oder aber beide zugleich gemischte Brüche sind.

a) Ist der Divisor ein gemischter Bruch, und der Dividend eine ganze Zahl oder ein ungemischter Bruch, so richte man den gemischten Bruch ein, und dividire im ersten Falle nach §. 6. B., und im zweyten nach §. 39.

b) Ist der Dividend ein gemischter Bruch, so richte man diesen ein, und dividire entweder nach §. 39., oder aber §. 6. B., je nachdem der Divisor ebenfalls ein Bruch, oder aber eine ganze Zahl ist.

c) Ist sowohl der Dividend als auch der Divisor ein gemischter Bruch, so richte man beide ein, und dividire dann nach §. 39.

I. Beyspiel:

Es sey 9 mit 4 ⅔ zu dividiren.

Auflösung:

1) Man mache 9 zu einem Bruche, und richte den Bruch 4 ⅔ ein, man erhält $\frac{9}{1}$, und $\frac{14}{3}$, da $9 = \frac{9}{1}$, und $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

2) $\frac{9}{1}$ dividire man mit $\frac{14}{3}$, man erhält $\frac{27}{14} = 1\frac{13}{14}$, indem $\frac{9}{1} : \frac{14}{3} = \frac{9\,.\,3}{14\,.\,1} = \frac{27}{14} = 1\frac{13}{14}$.

3) Daher ist nun $1\frac{13}{14}$ der verlangte Quotient, oder $9 : 4\frac{2}{3} = 1\frac{13}{14}$.

II. Beyspiel:

Es sey 5 ⅙ mit 7, und 7 ½ mit $\frac{5}{9}$ zu dividiren.

Auflösung:

1) Um 5 ⅙ mit 7 zu dividiren, richte man den Bruch 5 ⅙ ein, man erhält $\frac{31}{6}$, da $5\frac{1}{6} = \frac{31}{6}$, und dividire nun $\frac{31}{6}$ mit 7, man erhält $\frac{31}{42}$, indem $5\frac{1}{6} : 7 = \frac{31}{6} : 7 = \frac{31}{42}$ (§. 6. B.)

2) Um 7 ½ mit $\frac{5}{9}$ zu dividiren, richte man den Bruch 7 ½ ein, man erhält $\frac{15}{2}$, indem $7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$, und dividire nun $\frac{15}{2}$ mit $\frac{5}{9}$, man erhält 13 ½, indem $\frac{15}{2} : \frac{5}{9} = \frac{15\,.\,9}{5\,.\,2} = \frac{135}{10} = 13\frac{5}{10} = 13\frac{1}{2}$ (§. 39.).

III. Beyspiel:

Es sey der Bruch 6 ½ mit 4 ⅔ zu dividiren.

Auflösung:

1) Man richte beide Brüche ein, man erhält $\frac{13}{2}$, und $\frac{14}{3}$, indem $6\frac{1}{2} = \frac{13}{2}$, und $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

2) Den Dividend $\frac{14}{2}$ dividire man nach §. 39. mit

mit dem Divisor $^{14}/_5$, man erhält $1\ ^{11}/_{28}$, indem $^{13}/_2$: $^{14}/_5 = \frac{13\ .\ 3}{14\ .\ 2} = {}^{39}/_{28} = 1\ ^{11}/_{28}$.

3) Daher ist $1\ ^{11}/_{28}$ der verlangte Quotient, oder $6\,^1/_2 : 4\,^2/_3 = {}^{13}/_2 : {}^{14}/_3 = \frac{13\ .\ 3}{14\ .\ 2} = {}^{39}/_{28} = 1\ ^{11}/_{28}$.

Anmerkung: In der letzten Zeile der vorigen Seite lese man $^{13}/_2$ statt $^{14}/_2$.

§. 42.

Aufgabe, zusammengesetzte Brüche in einfache zu verwandeln.

Die zusammengesetzten Brüche (§. 3. d.), die einige auch gebrochene Brüche nennen, werden ohne Veränderung ihres Werthes auf folgende Weise in einfache Brüche (§. 3. c.) verwandelt:

1) Besteht der Zähler, oder Nenner, oder aber der Zähler und Nenner zugleich aus mehreren Theilen, so nehme man die durch das Zeichen ausgedrückte Addition, Subtraction rc. wirklich vor, um so den Zähler und Nenner durch eine einzige ganze oder gebrochene Zahl auszudrücken.

2) Nun betrachte man den Zähler als Dividend, und den Nenner als Divisor (§. 5.), und dividire nach den in diesem Abschnitte in Absicht auf die Division der Brüche aufgestellten Regeln, der Quotient giebt dann den einfachen Bruch, in welchen der gegebene zusammengesetzte Bruch ohne Veränderung seines Werthes verwandelt wurde.

I. Beyspiel:

Man solle den Bruch $\frac{^1/_2}{4}$, welcher gelesen wird „ein halbes Viertel“, in einen einfachen Bruch verwandeln.

Auflösung:

1) Den Zähler $^1/_2$ dividire man mit dem Nenner 4, man erhält $^1/_8$, indem $^1/_2 : 4 = {}^1/_8$.

2) Daher ist nun $\frac{1/2}{4} = 1/2 : 4 = 1/8$, und dieser zusammengesetzte oder gebrochene Bruch ist ohne Veränderung seines Werthes in den einfachen Bruch $1/8$ verwandelt worden.

II. Beyspiel:

Es sey der zusammengesetzte Bruch $\frac{3/4}{5/6}$, welcher gelesen wird „3 Viertel dividirt durch 5 Sechstel, oder $3/4$ dividirt durch $5/6$“, in einen einfachen Bruch zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man nehme $3/4$ als Dividend, und $5/6$ als Divisor, und dividire wirklich, man erhält $18/20 = 9/10$, indem $3/4 : 5/6 = 18/20 = 9/10$.

2) Daher ist nun $\frac{3/4}{5/6} = 3/4 : 5/6 = 18/20 = 9/10$, und dieser zusammengesetzte Bruch ist ohne Veränderung seines Werthes in den einfachen Bruch $9/10$ verwandelt worden.

III. Beyspiel:

Es soll der zusammengesetzte Bruch $\frac{3 + 2/5}{4 - 6/7}$, welcher gelesen wird „3 und $2/5$ dividirt durch 4 weniger $6/7$ oder 3 plus $2/5$ dividirt durch 4 minus $6/7$“ in einen einfachen Bruch verwandelt werden.

Auflösung:

1) Man bringe die beiden Summanden 3 und $2/5$ dadurch in eine Summe, daß man den gemischten Bruch $3 + 2/5 = 3\,2/5$ einrichtet (§. 28.), man erhält $17/5$.

2) Man subtrahire $6/7$ wirklich von 4, man erhält $3\,1/7$, indem $4 - 6/7 = 3\,7/7 - 6/7 = 3\,1/7$.

3) Den Bruch $17/5$ dividire man mit $3\,1/7$, indem man den aufgestellten Regeln gemäß den letzteren

Bruch einrichtet, man erhält $^{119}/_{110} = 1\ ^{9}/_{110}$; daher ist nun der gegebene zusammengesetzte Bruch in den einfachen Bruch $^{119}/_{110} = 1\ ^{9}/_{110}$ verwandelt worden, oder $\frac{3 + ^{2}/_{5}}{4 - ^{6}/_{7}} = (3 + ^{2}/_{5}) : (4 - ^{6}/_{7}) = ^{17}/_{5} :$ $3^{1}/_{7} = ^{17}/_{5} : ^{22}/_{7} = \frac{17 \cdot 7}{22 \cdot 5} = ^{119}/_{110} = 1\ ^{9}/_{110}$.

§. 43.

Die Probe bey den vier Rechnungsarten mit den gemeinen Brüchen betreffend.

Bey den Brüchen macht man die Probe eben so, wie bey den ganzen Zahlen.

a) Hat man was immer für gemeine Brüche addirt, so addire man noch einmal alle Brüche mit Ausnahme eines einzigen, und subtrahire diese zweyte Summe von der ersten, es muß, im Falle die Rechnung richtig ist, der ausgeschlossene Summand als Rest zum Vorscheine kommen (I. §. 42. A.)

b) Hat man Brüche von einander subtrahirt, so addire man zur Probe den Rest zum Subtrahend, man muß zur Summe den Minuend erhalten, oder aber man subtrahire den Rest vom Minuend, man wird, im Falle die Rechnung richtig ist, zum neuen Reste den vorigen Subtrahend erhalten (I. §. 41. A. u. B.)

c) Hat man was immer für Brüche unter sich, oder aber mit ganzen Zahlen multiplicirt, so dividire man, im Falle nur 2 Factoren mit einander multiplicirt wurden, mit einem beliebigen Factor (mit dem Multiplicand oder Multiplicator) das Product, es muß als Quotient der andere Factor herauskommen (I. §. 75.)

Hat man aber mehr als 2 Factoren mit ein=

ander multiplicirt, so multiplicire man wieder alle Factoren, mit Ausnahme eines einzigen, mit einander, und dividire mit diesem zweyten Producte das erste, es muß als Quotient jener Factor zum Vorscheine kommen, mit dem man das zweyte Mal nicht mehr multiplicirte (I. §. 75. Nro. 3.).

d) Hat man endlich mit Brüchen dividirt, so multiplicire man den Quotienten mit dem Divisor, oder umgekehrt den Divisor mit dem Quotienten, man muß zum Producte den Dividend erhalten (I. §. 74. B.).

Zur Probe kann man auch mit dem Quotienten den Dividend dividiren, es muß als neuer Quotient der vorige Divisor zum Vorscheine kommen (I. §. 74. A.).

§. 44.

Bemerkung, die vier Rechnungsarten mit Brüchen in benannten Zahlen betreffend.

1) Eine gebrochene unbenannte Zahl oder ein Bruch in unbenannten Zahlen wird jener Bruch genannt, der überhaupt Theile von was immer für einem Ganzen ausdrückt, wo somit jenes Ganze, von welchem durch den Bruch gewiße Theile ausgedrückt werden, nicht ausdrücklich genannt ist. Ich habe z. B. solche Brüche, wenn ich bloß sage $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$ ꝛc.

2) Eine gebrochene benannte Zahl oder ein Bruch in benannten Zahlen wird jener Bruch genannt, bey welchem das Ganze, von welchem durch denselben gewiße Theile ausgedrückt werden, genannt ist, und somit sein Ganzes als eine Größe bestimmter Art — als eine benannte Zahl genommen wird; z. B. $^3/_4$ fl., $^1/_8$ Thlr., $^1/_2$ Elle ꝛc.

3) Hinsichtlich der vier Rechnungsarten mit be-

nannten Brüchen kömmt sowohl das in Anwendung, was theils im I. Theile im II. Hauptstücke über die vier Rechnungsarten mit ganzen benannten Zahlen gesagt worden ist, als auch dasjenige, was eben jetzt in diesem Hauptstücke in Absicht auf die Addition, Subtraction ꝛc. mit den gemeinen Brüchen vorgetragen worden ist.

a) Sind nämlich die gegebenen benannten Brüche der Art, daß sie unter den im §. 24. gesetzten Bedingungen wirklich addirt werden können, so bringt man sie nach den aufgestellten Regeln, indem man sie bey der Operation wie unbenannte Zahlen betrachtet, in eine Summe, und giebt dann dieser jene Benennung, welche die Summanden haben. Hat man demnach z. B. solche Brüche addirt, die Theile eines Guldens ausdrücken, so drückt die gefundene Summe ebenfalls wieder Gulden aus.

b) Sind die vorkommenden Brüche so beschaffen, daß sie nach Vorschrift des §. 29. von einander subtrahirt werden können, so betrachtet man sie bey der wirklichen Subtraction wie unbenannte Zahlen, und giebt dann der gefundenen Differenz jene Benennung, welche der Minuend und Subtrahend hat. Ist z. B. $\frac{3}{4}$ kr. von $\frac{7}{8}$ kr. subtrahirt worden, so drückt der gefundene Rest $\frac{1}{8}$ auch wieder Kreutzer aus, d. h., $\frac{7}{8}$ kr. — $\frac{3}{4}$ kr. = $\frac{7}{8}$ kr. — $\frac{6}{8}$ kr. = $\frac{1}{8}$ kr.

Würden die Brüche bey der Addition und Subtraction Theile von gleichartigen aber ungleichnamigen Ganzen ausdrücken, so müßte man sie allererst nach §. 14. oder §. 15. so reduciren, daß sie Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, und dann den aufgestellten Regeln gemäß die Addition und Subtraction vornehmen.

c) Ist ein benannter Bruch mit einer unbenannten ganzen oder gebrochenen Zahl zu multipliciren, so multiplicirt man nach den bey der Multiplication aufgestellten Regeln, und giebt dem Producte die Benennung des Multiplicands; daher ist z. B. $\frac{3}{4}$ fl. $\times$ $\frac{2}{5}$ = $\frac{6}{20}$ fl. = $\frac{3}{10}$ fl., und $\frac{5}{8}$ kr. $\times$ 2 = $\frac{10}{8}$ kr. = 1 $\frac{2}{8}$ kr. = 1 $\frac{1}{4}$ kr.

Wären zwey oder auch mehrere Factoren gegeben, die alle benannte Zahlen sind, so betrachte man sie wie unbenannte Zahlen, und nehme den gegebenen Regeln gemäß die Multiplication vor. Entweder aus der vorliegenden Aufgabe selbst, oder aber mittels anderwärtiger Kenntnisse muß man dann bestimmen, was für Einheiten das erhaltene Product ausdrücken wird.

d) Ist endlich ein benannter Bruch durch eine unbenannte Zahl zu dividiren, so dividirt man nach den bekannten Regeln, und giebt dem erhaltenen Quotienten die Benennung des Dividends; daher ist z. B. $^{3}/_{4}$ fl. : $^{2}/_{5}$ = $^{15}/_{8}$ fl. = 1 $^{7}/_{8}$ fl., und $^{4}/_{5}$ fl. : 2 = $^{4}/_{10}$ fl. = $^{2}/_{5}$ fl.

Ist aber der Dividend und der Divisor eine benannte Zahl, so betrachte man diese beiden Zahlen wie unbenannte Zahlen, und gebe dann dem erhaltenen Quotienten entweder keine Benennung, im Falle er nämlich eine unbenannte Zahl bleiben muß, oder aber man gebe ihm die Benennung jener Einheiten, die er der vorliegenden Aufgabe gemäß ausdrücken wird.

4) Weil ich im I. Theile dieses Lehrbuches die vier Rechnungsarten mit ganzen benannten Zahlen und die dabey vorzunehmenden Reductionen ausführlich darstellte, und die benannten Brüche auf eine ähnliche Weise behandelt werden müssen, so machte ich in diesem und in dem vorhergehenden Abschnitte zwischen gebrochenen benannten und unbenannten Zahlen keinen Unterschied, und führte deßhalb in diesen beiden Abschnitten Beyspiele sowohl mit unbenannten als auch benannten Brüchen an.

§. 45.

Wiederholung in Fragen.

1) Welche Brüche heißt man gemischte und ungemischte Brüche?

2) Was heißt dieses, Brüche einrichten, und nach welcher Regel geschieht die Einrichtung der Brüche?

3) Warum müssen die Brüche bey der Addition

und Subtraction unter gleiche Benennung gebracht werden, und aus welchem Grunde müssen sie, um wirklich addirt werden zu können, Theile eines und des nämlichen Ganzen ausdrücken?

4) Was heißt dieses, Brüche, welche Theile von gleichartigen aber ungleichnamigen Ganzen ausdrücken, reduciren, und nach welchen Regeln geschieht die Reduction derselben?

5) Wie lauten die im I. Theile bey den vier Rechnungsarten mit ganzen Zahlen aufgestellten Grundsätze der Addition, Subtraction, Multiplication und Division, wenn man sie auf die Brüche in Anwendung bringt?

6) Was heißt dieses, Brüche addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, und nach welcher Regel geschieht jede dieser Rechnungsarten bey Brüchen?

7) Was heißt dieses, zusammengesetzte oder gebrochene Brüche in einfache Brüche verwandeln, und nach welchen Regeln geschieht diese Verwandlung der Brüche?

8) Aus welchem Grunde darf man auch bey Brüchen die Stellen der Factoren verwechseln, und wie ist die Sache anzugehen, wenn man bey den vier Rechnungsarten mit Brüchen die Probe machen will?

§. 46.

Beyspiele zur Uebung.

I.

Die Einkünfte einer gewißen erledigten Pfarrey sind in dem königl. baier. Regierungsblatte auf folgende Weise bekannt gemacht worden.

Der Ertrag besteht:

a) aus 500 fl. fixen Gehalt;

b) aus 22 fl. 24 $\frac{1}{4}$ kr. an Realitäts-Nutzungen;

c) aus 152 fl. 15 $\frac{3}{4}$ kr. von besonderen Dienst-Verrichtungen, und

d) aus 350 fl. an Bezügen für den Unterhalt des Hilfspriesters.

Die Lasten mit Einschluß der Kosten des Hilfspriesters belaufen sich auf 394 fl. 24 $\frac{1}{2}$ kr.

Welche Rente oder reiner Ertrag ergiebt sich nun bey dieser Pfarrey, wenn man nämlich die Lasten von den Einkünften in Abzug bringt?

II.

Zum Gusse der großen Salveglocke an der Frauenkirche in München wurden 67 $^{11}/_{25}$ Centner Kupfer, 38 $^{17}/_{25}$ Ctn. Messing, und 28 $^{22}/_{25}$ Ctn. Zinn genommen; wie viel betrug nun das gesammte dazu verwendete Metall?

III.

Zur großen Glocke in Wien, die auf Befehl des Kaisers im Jahre 1711 gegossen wurde, brauchte man an Kupfer 323 $^{5}/_{16}$, und an englischem Zinn 64 $^{9}/_{16}$, Centner; wie viel Metall wurde nun zum Gusse dieser Glocke genommen?

IV.

Nach Angabe des Herrn Professors Prändel ent-enthält eine baierische Mard'or 6 $^{1}/_{6}$ Gran Gold, 1 $^{1}/_{6}$ Gran Silber, und $^{1}/_{2}$ Gran Kupfer; wie viel Gran muß ein solches Goldstück schwer seyn?

V.

Die gerade Linie von München bis Freysing beträgt 8 $^{12}/_{23}$ Stunden, die Strassenlänge eben dahin mißt 8 $^{11}/_{20}$ Stunden; wie viel beträgt nun der Unterschied dieser beiden Längen?

VI.

Ein Holzstoß hält 986 $^{4}/_{8}$ baierische Kubikfuß; wie viel baierische Klafter beträgt nun dieser Holzstoß, da 126 baierische Kubikfuß eine baierische Klafter geben?

VII.

Eine Elle Tuch kostet 6 $^{1}/_{2}$ fl., was kosten 4 $^{2}/_{8}$ Ellen des nämlichen Tuches?

VIII.

Die Länge eines Gartens, welcher die Gestalt

eines Rechteckes hat, beträgt 46 $^4/_5$, und seine Breite 27 $^2/_3$ baierische Schuh; wie viel baierische Quadratschuh hält nun der Flächeninhalt desselben?

IX.

Wenn auf ein Schiff 1290 $^1/_2$ Schäffel Gersten geladen werden, und man annimmt, daß im Durchschnitte ein Schäffel Gersten 2 $^3/_5$ Centner wiegt, wie viel beträgt nun die Ladung desselben?

X.

Von einer gewißen Waare kosten 48 $^1/_5$ Centner 478 $^1/_3$ fl., wie viel kostet 1 Centner der nämlichen Waare?

XI.

Ein baierischer Kubikschuh Gold wiegt 8 $^1/_2$ Centner, und ein Kubikschuh Kupfer 3 $^3/_7$ Centner; wie vielmal ist das Gold schwerer als das Kupfer?

XII.

Der Planet Jupiter bewegt sich in 11 $^{19}/_{22}$ Jahr um die Sonne, der Saturnus hingegen in 29 $^{11}/_{24}$ Jahr; wie vielmal länger ist das Jahr des letzteren als jenes des ersteren?

II. Hauptstück.

Anwendung der vier Rechnungsarten mit ganzen und gebrochenen Zahlen auf die Aufgaben der so genannten Regeldetri.

I. Abschnitt.

Erklärungen, Lehnsätze und Aufgaben — als Einleitung zur Auflösung der Aufgaben der so genannten Regeldetri.

§. 47.

Arithmetisches und geometrisches Verhältniß.

Zwey Zahlen können mit einander auf eine zweyfache Weise verglichen werden.

Man kann nämlich untersuchen, um wie viel die eine Zahl größer oder kleiner ist, als die andere, oder aber man kann nntersuchen, wie oft eine Zahl in der andern enthalten ist.

a) Untersucht man durch die vorgenommene Subtraction, um wie viel eine Zahl größer oder kleiner ist, als die andere, so hat man das, was ein **arithmetisches Verhältniß** (Ratio arithmetica) genannt wird.

Die Bestimmung derjenigen Zahl, welche angiebt, um wie viel die eine Zahl größer oder kleiner ist, als die andere, oder die Vergleichung zweyer Zahlen durch Subtraction heißt demnach ein arithmetisches Verhältniß.

Wenn ich z. B. die Zahl 6 mit 9 vergleiche, um zu finden, um wie viel 6 kleiner ist als 9, so finde ich durch die Subtraction die Zahl 3 zur Differenz (I. §. 33.), indem 9 — 6 = 3, und somit 6 + 3 = 9; weßwegen ich nun hier das so genannte arithmetische Verhältniß habe.

b) Untersucht man aber durch die Division, wie oft eine Zahl in der anderen enthalten ist, so hat man das, was ein geometrisches Verhältniß (Ratio geometrica) genannt wird.

Die Bestimmung derjenigen Zahl, welche anzeigt, wie oft die eine Zahl, oder ein gewißer Theil derselben genommen werden muß, um die andere Zahl zu erhalten, oder die Vergleichung zweyer Zahlen durch Division heißt daher ein geometrisches Verhältniß.

Wenn ich z. B. 4 mit 8 vergleiche, um zu finden, wie oft 4 in 8 enthalten ist, so finde ich durch die Division die Zahl 2 zum Quotienten (I. §. 61. a.), indem 8 : 4 = 2, und somit 4 × 2 = 8; weßwe- ich nun hier das so genannte geometrische Verhältniß habe.

Diese beiden Verhältnisse, welche aus der eben erwähnten angestellten Vergleichung hervorgehen, werden überhaupt Zahlen-Verhältnisse genannt, indem hier nur Zahlen, mithin solche Dinge mit einander verglichen werden, die man als Größen betrachtet, und derer Größe somit in Zahlen ausgedrückt wird.

Die Benennung „Verhältniß“ kömmt daher, weil man durch die angestellte Vergleichung erkennt, wie ein Ding sich zum anderen verhalte, d. h., wie ein Ding in Beziehung auf das andere beschaffen sey.

§. 43.

Das Vorderglied, Hinterglied, der Exponent, und das Zeichen dieser Verhältnisse.

Die Dinge, die man als Größen betrachtet, und mit einander vergleicht, somit die Zahlen, die auf die angegebene Weise mit einander verglichen werden, heißt man die Glieder (Termini) des Verhältnisses, und zwar

a) das erste oder voranstehende, das **Vorderglied** (Antecedens), und

b) das zweyte oder nachstehende, das **Hinterglied** (Consequens).

c) Diejenige Zahl, welche durch das Verhältniß bestimmt wird, und daher beym arithmetischen Verhältnisse durch die Subtraction, beym geometrischen aber durch die Division zum Vorscheine kömmt, heißt man den **Verhältnißzeiger** — den **Exponenten** des Verhältnisses.

d) Ein Verhältniß heißt **abnehmend** oder **zunehmend**, je nachdem das Hinterglied kleiner, oder größer als das Vorderglied ist.

Wenn z. B. 4 mit 8 verglichen wird, um zu finden, wie oft 4 in 8 enthalten ist, so ist hier 4 das **Vorderglied**, 8 das **Hinterglied**, und die Zahl 2, welche anzeigt, daß 4 in 8 zweymal enthalten ist, der **Exponent** dieses geometrischen Verhältnisses, welches **zunehmend** — **wachsend** ist.

Vergleiche ich z. B. 6 mit 9, um zu finden, um wie viel die Zahl 9 größer ist als 6, so ist hier 6 das **Vorderglied**, 9 das **Hinterglied**, die Zahl 3 als die Differenz dieser beiden Zahlen der **Exponent** dieses **zunehmenden** arithmetischen Verhältnisses.

e) **Zeichen** des Verhältnisses ist jenes Zeichen, womit man ausdrückt, daß zwey Zahlen zusammen in einem Verhältnisse stehen.

Weil nun beym arithmethischen Verhältnisse der Exponent durch die Subtraction, der Exponent des geometrischen aber durch die Division gefunden wird, so ist

a) das Zeichen der Subtraction, welches in einer horizontalen Linie, einem Querstriche (—) besteht, als Zeichen des arithmetischen, und

b) jenes Divisionszeichen, welches in zwey Puncten (:) besteht, als Zeichen des geometrischen Verhältnisses eingeführt worden.

Diese beiden Zeichen, wenn sie Verhältnisse anzeigen, müssen immer als **Verhältnißzeichen** gelesen werden.

Daher werden z. B. diese beiden Verhältnisse „3 — 6, 8 : 4" so gelesen: „3 **verhält sich zu** 6, 8 **verhält sich zu** 4, oder auch: **das Verhältniß** 3 **zu** 6, **das Verhältniß** 8 **zu** 4." Das erste dieser beiden Verhältnisse, wie man es aus den Zeichen erkennt, ist ein arithmetisches, und das zweyte ein geometrisches Verhältniß.

§. 49.

Eigenschaften des arithmetischen Verhältnisses.

a) **Im arithmetischen Verhältnisse müssen die Glieder gleichartig seyn.**

Beym arithmetischen Verhältnisse werden die Zahlen durch Subtraction mit einander verglichen (§. 47. a.). Es können aber, wie dieses schon mehrmal erwähnt wurde, nur gleichartige Größen von einander subtrahirt, und nur solche Größen zu einander addirt werden, daher können z. B. 2 baierische Fuß mit 6 baier. Fuß durch Subtraction verglichen werden, und somit diese beiden benannten Zahlen in einem arithmetischen Verhältnisse stehen, welches der Fall nicht ist, wenn man in dieser Hinsicht z. B. 2 Pfund einer gewißen Waare mit 6 Schuh vergleichen wollte.

b) **Die Größe des arithmetischen Verhältnisses ist durch die Größe des Exponenten bestimmt, und Verhältnisse von gleichen Exponenten sind einander gleich, von ungleichen Exponenten ungleich.**

Daher ist z. B. das Verhältniß 2 zu 7 gleich dem

Verhältnisse 4 zu 9, weil 7 weniger 2 gleich 5, 9 weniger 4 auch gleich 5, und somit bey diesen beiden Verhältnissen der nämliche Exponent da ist.

Findet man durch die angestellte Vergleichung, daß ein Verhältniß dem andern gleich ist, so drückt man diese Gleichheit der Verhältnisse durch das bekannte Gleichheitszeichen aus (I. §. 9.), welches dann kürzer durch das Wörtchen „wie" gelesen wird.

Anstatt daß man nun z. B. die Gleichheit dieser zwey Verhältnisse „2 — 7 = 4 — 9" so aussprechen würde „das Verhältniß 2 zu 7 ist gleich dem Verhältnisse 4 zu 9", so sagt man kürzer: „2 verhält sich zu 7, wie 4 zu 9."

Im Gegentheile sind z. B. diese arithmetischen Verhältnisse „1 — 2, 3 — 6, 7 — 18 rc." einander ungleich, weil beym ersten Verhältnisse 1, beym zweyten 3, und beym dritten Verhältnisse 11 der Exponent ist.

c) Zwey arithmetische Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind es auch unter sich.

Sind nämlich zwey solche Verhältnisse einem dritten gleich, so haben sie mit diesem, mithin auch unter sich, den nämlichen Exponenten, weßwegen sie einander gleich sind. Es verhält sich z. B.

$$2 - 4 = 6 - 8$$
$$7 - 9 = 6 - 8$$

also auch $2 - 4 = 7 - 9$.

Bey diesen drey Verhältnissen ist 2 der Exponent, daher sind sie unter einander gleich.

d) Das arithmetische Verhältniß zweyer gleichartigen, durch einerley Maaß bestimmten Größen ist dem Verhältnisse jener Zahlen gleich, die ihre Größe ausdrücken.

Daher verhalten sich z. B. 2 baier. Fuß zu 12 baier. Fuß, wie 2 zu 12, indem beiderseits eine gleich große Differenz ist, oder

2 baier. Fuß — 12 baier. Fuß = 2 — 12.

Es läßt sich demnach jedes arithmetische Verhältniß durch das Verhältniß bloßer Zahlen ausdrücken.

e) **Den Exponenten des arithmetischen Verhältnisses erhält man, wenn man was immer für ein Glied von einem anderen, somit das kleinere vom größeren subtrahirt; bey gleichen Gliedern ist die Differenz somit der Exponent des Verhältnisses Null.**

In der Buchstaben-Rechnung zieht man in der Regel immer das Vorderglied vom Hintergliede ab, und erhält da beym abnehmenden Verhältnisse einen negativen Exponenten, wovon aber in der gemeinen Arithmetik — in der bloßen Ziffern-Rechnung noch keine Rede seyn kann (I. §. 37. Anmerk.).

Daher haben z. B. diese arithmetischen Verhältnisse „3 — 5, 8 — 2, 4 — 4" der Ordnung nach die Exponenten „2, 6, 0."

§. 50.

Eigenschaften des geometrischen Verhältnisses.

a) **Im geometrischen Verhältnisse müssen beide Glieder gleichartig seyn.**

Bey diesem Verhältnisse werden die Größen durch Division mit einander verglichen, und der Exponent des Verhältnisses drückt aus, wie oft ein Glied in dem andern enthalten ist, oder was eines ist, wie oft das eine Glied, oder ein bestimmter Theil desselben gesetzt werden muß, um das andere Glied zu erhalten (§. 47. b.). Was immer für eine Größe mehrmal gesetzt giebt aber zum Producte eine Größe der nämlichen Art und Benennung, und eine benannte Zahl kann nur in einer mit ihr gleichartigen Größe mehrmal enthalten seyn. Aus diesem Grunde müssen die Glieder eines solchen Verhältnisses immerhin gleichartig seyn.

Es können daher z. B. 6 baier. Fuß und 18 solche Fuß ein geometrisches Verhältniß bilden, weil 6

solche Fuß in 18 Fuß 3 mal enthalten sind, und 6 Fuß 3 mal genommen wieder diese 18 Fuß geben.

Dagegen können z. B. 2 Centner und 12 Tagwerk nie in ein solches Verhältniß gesetzt werden, weil 2 Centn. in 12 Tagw. weder enthalten sind, noch auch dieselben mehrmal gesetzt zum Producte 12 Tagwerk geben.

b) **Die Größe des geometrischen Verhältnisses ist durch die Größe des Exponenten bestimmt, und Verhältnisse von gleichen Exponenten sind gleich, von ungleichen Exponenten ungleich.**

Daher ist z. B. das Verhältniß 2 zu 4 gleich dem Verhältnisse 8 zu 16, weil sowohl 2 in 4, als auch 8 in 16 zweymal enthalten ist.

Findet man durch die angestellte Vergleichung, daß zwey solche Verhältnisse einander gleich sind, so wird die Gleichheit dieser Verhältnisse ebenfalls durch das Gleichheitszeichen (=) ausgedrückt, und wie bey den arithmetischen Verhältnissen kürzer durch das Wörtchen „wie“ gelesen.

Die beiden eben angeführten gleichen Verhältnisse werden demnach so geschrieben „2 : 4 = 8 : 16“, und auf diese Weise gelesen „2 verhält sich zu 4, wie 8 zu 16.

Sind die Glieder des geometrischen Verhältnisses gleich, so heißt man es das **Verhältniß der Gleichheit** (Ratio aequalitatis), sind sie aber ungleich, so nennt man es das **Verhältniß der Ungleichheit** (Ratio inaequalitatis).

Im ersten Falle ist der Exponent des Verhältnisses immer 1, weil jede Größe in sich selbst einmal enthalten ist, und im zweyten Falle ist derselbe immer entweder größer oder kleiner als 1. Es ist daher z. B. das Verhältniß „4 : 4“ ein **Verhältniß der Gleichheit**, hingegen aber „5 : 6“ ein **Verhältniß der Ungleichheit**.

c) **Zwey geometrische Verhältnisse, die ei-**

einem dritten gleich, sind es auch unter sich.

Der Grund liegt darin, weil solche Verhältnisse, im Falle sie einem dritten gleich sind, mit diesem dritten, somit auch unter sich gleiche Exponenten haben. Es verhält sich z. B.

$$\begin{array}{l} 2 : 4 = 8 : 16 \\ 3 : 6 = 8 : 16 \\ \hline \end{array}$$

also auch $2 : 4 = 3 : 6$.

d) **Das geometrische Verhältniß zweyer gleichartigen durch einerley Maaß bestimmten Größen ist dem Verhältnisse der Zahlen gleich, die ihre Größe ausdrücken.**

Solche Größen sind gleichartig und zugleich gleichnamig, daher verhalten sich z. B. 12 fl. zu 24 fl. wie 12 zu 24, oder 12 fl. : 24 fl. = 12 : 24.

Es läßt sich demnach jedes geometrische Verhältniß zweyer gleichartigen und gleichnamigen Größen auf das Verhältniß bloßer Zahlen zurückbringen.

e) **Den Exponenten des geometrischen Verhältnisses erhält man, wenn man das Hinterglied durch das Vorderglied dividirt.**

Daher haben z. B. diese geometrischen Verhältnisse „3 : 6, 2 : 1, 8 : 24“ der Ordnung nach die Exponenten „2, ½, 3.“

f) **Das geometrische Verhältniß zweyer Zahlen bleibt unverändert, wenn man mit einer ganzen Zahl entweder die beiden Glieder multiplicirt, oder aber damit die beiden Glieder des Verhältnisses dividirt.**

Der Grund liegt darin, weil auf diese Weise der Exponent des Verhältnisses nicht verändert wird, und somit das Verhältniß immer das nämliche bleibt.

Daher sind alle diese Verhältnisse „1 : 2, 4 : 8, 8 : 16, 16 : 32, 96 : 192“ einander gleich, indem

Bayerische Staatsbibliothek München

1 in 2, 4 in 8, 8 in 16 ꝛc. zweymal enthalten ist; eben so sind diese Verhältnisse „27 : 81, 9 : 27, 1 : 3“ einander gleich, indem 27 in 81, 9 in 27 ꝛc. dreymal enthalten ist.

Im ersten Beyspiele hat man die Glieder des Verhältnisses „1 : 2“ mit der nämlichen Zahl multiplicirt, und im zweyten Falle wurden die Glieder des Verhältnisses „27 : 81“ immerhin mit der nämlichen Zahl dividirt.

g) Das geometrische Verhältniß zweyer Brüche, die Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, ist dem Verhältnisse ihrer Zähler gleich, wenn man sie unter einerley Benennung bringt.

Daher verhält sich nun z. B. $\frac{2}{3}$ zu $\frac{5}{6}$ wie 12 zu 15, oder $\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = 12 : 15$, indem $\frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{12}{18}$, $\frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$, und also $\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{12}{18} : \frac{15}{18} = 12 : 15$.

h) Da sich alle geometrische Verhältnisse auf Verhältnisse bloßer Zahlen, und alle Verhältnisse der Zahlen auf jene ganzer Zahlen bringen lassen, so läßt sich jedes geometrische Verhältniß auf das Verhältniß ganzer unbenannter Zahlen zurückführen.

§. 51.

Die arithmetische und geometrische Proportion.

Zwey gleiche Verhältnisse geben eine Proportion.

Sind die beiden Verhältnisse arithmetisch, so geben sie das, was eine arithmetische Proportion (Proportio arithmetica), sind aber die beiden gleichen Verhältnisse geometrisch, so geben sie das, was eine geometrische Proportion (Porportio geometrica) genannt wird.

Von diesen beiden Proportionen „3 — 5 = 8 —

10, dann 2 : 4 = 8 : 16" ist die erste eine arithmetische, und die zweyte eine geometrische Proportion. Diese Proportionen, wie es schon bemerkt wurde, werden so gelesen „3 verhält sich zu 5, wie 8 zu 10, ferner 2 verhält sich zu 4, wie 8 zu 16."

Jede Proportion besteht aus zwey Vorder- und zwey Hintergliedern, somit aus 4 Gliedern, indem dabey immer zwey Verhältnisse vorkommen, und jedes von diesen ein Vorderglied und ein Hinterglied hat.

Wie alle Verhältnisse, eben so lassen sich auch alle geometrischen Proportionen auf solche von ganzen Zahlen bringen.

§. 52.

Benennung der in der Proportion vorkommenden Glieder.

Man nennt in einer arithmetischen und geometrischen Proportion

a) das erste und letzte Glied zusammen die äusseren Glieder (Termini extremi),

b) das zweyte und dritte (von der Linken zur Rechten gezählet) die mittleren Glieder (Termini medii),

c) die beiden Vorder- und die beiden Hinterglieder homologe, gleichnamige Glieder (Termini homologi).

Daher sind z. B. in dieser Proportion „2 : 4 = 8 : 16" die Glieder 2 und 16 die äusseren, 4 und 8 die mittleren; 2 und 8, ferner 4 und 16 sind die gleichnamigen Glieder.

d) Die arithmetische und geometrische Proportion heißt dißcret oder stättig (Proportia discreta aut continua), je nachdem die beiden mittleren Glieder ungleich oder gleich sind. Die so eben als Beyspiel angeführte Proportion ist dißcret, hingegen aber diese Proportion „2 : 4 = 4 : 8" ist stättig.

Diese stättige Proportion wird kürzer so geschrieben „2 : 4 : 8", und aber wieder wie vorhin gelesen, nämlich „2 verhält sich zu 4, wie 4 zu 8." In diesem Falle ist das Hinterglied des ersten Verhältnisses zugleich Vorderglied des zweyten Verhältnisses.

§. 53.

Aufgabe, zu drey Gliedern einer arithmetischen dißcreten Proportion das vierte Glied zu finden.

a) Ist eines der beiden äusseren Glieder unbekannt, so addire man die mittleren Glieder, und subtrahire von dieser Summe das bekannte äussere Glied.

b) Ist eines der mittleren Glieder unbekannt, so addire man die äusseren Glieder, und subtrahire davon das bekannte mittlere Glied.

Weil in einer dißcreten arithmetischen Proportion die Summe der äusseren Glieder jederzeit gleich ist der Summe der mittleren Glieder, so nehme man zur Probe diese Addition wirklich vor, um sich zu versichern, daß man das gesuchte unbekannte Glied wirklich gefunden habe.

Oder aber man setze die gefundene Zahl an die Stelle des unbekannten Gliedes, und untersuche nun durch Subtraction, ob beide Verhältnisse den nämlichen Exponenten haben; wobey aber zu bemerken ist, daß man beiderseits entweder das Vorderglied vom Hintergliede, oder beiderseits das Hinterglied vom Vordergliede abziehen muß.

I. Beyspiel:

Es sey 4 das erste, 6 das zweyte, und 13 das dritte Glied einer dißcreten arithmetischen Proportion, es werde nun zu diesen 3 Zahlen die vierte arithmetische Proportionalzahl gefunden.

Auflösung:

1) Weil, wie dieses immerhin der Fall seyn muß, nicht nur diese drey Zahlen bekannt sind, sondern auch die Ordnung, nach welcher die Glieder in der Proportion zu stehen kommen, gegeben ist, so drücke man das unbekannte Glied durch den Buchstaben x

aus, und setze die Proportion auf folgende Weise an: „4 — 6 = 13 — x.“

2) Der bey a. in diesem §. aufgestellten Regel gemäß ist nun x = 6 + 13 — 4, d. h., das vierte Glied ist gleich der Summe der mittleren Glieder davon abgezogen das erste Glied, oder was eines ist, man erhält das vierte Glied x, wenn man die beiden mittleren Glieder addirt, und von dieser Summe das erste Glied subtrahirt. Man bekömmt auf diese Weise 15, indem 6 + 13 — 4 = 15, und somit x = 6 + 13 — 4 = 15.

Probe:

1) Anstatt x setze man nun die gefundene Zahl 15 als das vierte Glied man erhält nun die Proportion „4 — 6 = 13 — 15;“

2) Hier haben beide Verhältnisse den Exponenten 2, indem zwischen 4 und 6 die nämliche Differenz ist, wie zwischen 13 und 15; ferner die Summe der äussern Glieder ist auch gleich der Summe der mittleren Glieder, indem 4 + 15 = 19, 6 + 13 = 19, und somit 4 + 15 = 6 + 13.

II. Beyspiel:

Es sey 9 das erste, 18 das zweyte, und 47 das vierte Glied einer solchen Proportion, es soll nun das dritte Glied gefunden werden.

Auflösung:

1) Da nebst den Zahlen auch die Stellen, welche ihnen in der Proportion zu kommen, gegeben sind, so bezeichne man wieder das fehlende Glied mit dem Buchstaben x, man erhält die Proportion „9 — 18 = x — 47;“

2) Weil hier eines der mittleren Glieder fehlt, so addire man die äusseren Glieder 9 und 47, und subtrahire von dieser Summe das bekannte mittlere Glied 18; es ist x = 9 + 47 — 18, d. h., das dritte Glied ist gleich der Summe der äusseren Glieder, davon das zweyte Glied abgezogen, und somit ist x = 38, indem 9 + 47 — 18 = 38.

Probe:

Man setze anstatt x das gefundene dritte Glied 38; findet man nun zwischen dem ersten und zweyten Gliede die nämliche Differenz, wie zwischen dem dritten und vierten Gliede; ist ferner die Summe der äusseren Glieder gleich jener der mittleren Glieder, dann ist die Rechnung richtig. Es ist aber in der Proportion „9 — 18 = 38 — 47" die Summe der äusseren Glieder wirklich gleich jener der mittleren Glieder, indem 9 + 47 = 56, 18 + 38 = 56, und somit 9 + 47 = 18 + 38. Ueberdieß ist zwischen 9 und 18 die nämliche Differenz, wie zwischen 38 und 47; weßwegen das verlangte dritte Glied wirklich gefunden worden ist.

§. 54.

Aufgabe, zu zwey Gliedern einer stättigen arithmetischen Proportion das dritte unbekannte Glied zu finden.

Die stättige arithmetische Proportion wird, wie die geometrische (§. 52. d.), kürzer nur mit drey Gliedern geschrieben, wo dann das mittlere Glied Hinterglied des ersten Verhältnisses, und zugleich Vorderglied des zweyten Verhältnisses ist.

Um das unbekannte Glied zu finden, beobachte man nun folgende Regeln:

a) Ist eines der beiden äusseren Glieder unbekannt, so nehme man das mittlere Glied doppelt, d. h., man multiplicire es mit 2, und subtrahire davon das bekannte äussere Glied.

b) Fehlt aber das mittlere Glied, so addire man die äusseren Glieder, und dividire diese Summe mit 2.

Weil in einer solchen Proportion die Summe der äusseren Glieder dem doppelten mittleren Gliede gleich ist, so addire man zur Probe die äusseren Glieder, und sehe, ob diese Summe gleich ist dem Zweyfachen des mittleren Gliedes, oder aber man untersuche, ob

zwischen dem ersten und zweyten Gliede die nämliche Differenz ist, wie zwischen dem zweyten und dritten Gliede, um auf diese Weise zu erkennen, ob man in der Rechnung einen Fehler gemacht hat oder nicht.

I. Beyspiel:

Es sey 10 das erste, und 18 das mittlere Glied einer stättigen arithmetischen Proportion, und man suche das letzte oder dritte Glied, indem nämlich das mittlere Glied nur einmal geschrieben wird.

Auflösung:

1) Weil man bestimmt das erste und mittlere Glied weiß, so drücke man das unbekannte dritte oder letzte Glied mit x aus, und setze nun die Proportion auf folgende Weise an: „10 — 18 = 18 — x, oder kürzer 10 — 18 — x;"

2) Man nehme nun das mittlere Glied doppelt, und subtrahire davon 10, man erhält 26, indem 18 × 2 — 10 = 26; weßwegen das gesuchte Glied 26 ist, oder x = 18 × 2 — 10 = 26.

Probe:

Man addire, indem man anstatt x die gefundene Zahl 26 setzet, in der Proportion „10 — 18 — 26" die äusseren Glieder, und nehme das mittlere Glied doppelt, man erhält beiderseits 36, zum Beweise, daß man wirklich die verlangte dritte arithmetische Proportionalzahl gefunden hat. Dieses letztere ist auch aus der Gleichheit der beiderseitigen Exponenten ersichtlich, indem zwischen 10 und 18 die nämliche Differenz ist, wie zwischen 18 und 26.

II. Beyspiel:

Es sey 30 das erste Glied, und 59 das letzte Glied einer solchen Proportion, und man soll zu diesen beiden Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl, somit das mittlere Glied der stättigen arithmetischen Proportion finden.

Auflösung:

1) Man bezeichne das mittlere Glied mit x, und setze diese Proportion an: „30 — x — 59;"

2) Man addire die äusseren Glieder, und dividire diese Summe mit 2, man erhält 44½, somit ist $x = \frac{30 + 59}{2} = {}^{89}/_{2} = 44\,{}^{1}/_{2}$, d. h., die mittlere arithmetische Proportionalzahl zweyer Zahlen ist ihrer halben Summe gleich.

Die Probe wird hier eben so, wie im vorigen Beyspiele gemacht.

Unter der mittleren arithmetischen Proportionalzahl versteht man hier das Nämliche, was im I. Theile im II. Beyspiele des §. 113. das arithmetische Medium, oder die arithmetische Mittelzahl genannt wurde.

§. 55.

Aufgabe, zu drey Gliedern einer geometrischen dißcreten Proportion das vierte unbekannte Glied zu finden.

a) Ist eines der äusseren Glieder, etwa das letzte Glied, unbekannt, so multiplicire man die mittleren Glieder mit einander, und dividire das Product mit dem bekannten äusseren Gliede, in diesem Falle mit dem ersten.

Diese Regel wird im Latein auch so ausgedrückt: „Duc ternum in medium, productum divide primo", d. h., um das vierte Glied zu finden, multiplicire man die mittleren Glieder mit einander, und dividire das Product mit dem ersten Gliede.

b) Fehlet eines der beiden mittleren Glieder, etwa das dritte, so multiplicire man mit einander die äusseren Glieder, und dividire das Product mit dem bekannten mittleren Gliede, in diesem Falle mit dem zweyten Gliede.

I. Beyspiel:

Es sey 4 das erste, 8 das zweyte, 16 das dritte Glied einer geometrischen dißcreten Proportion, und es soll das vierte Glied gefunden werden.

Auflösung:

1) Man bezeichne das unbekannte Glied mit dem Buchstaben x, und setze die Proportion

$$4 : 8 = 16 : x;$$

2) Man multiplicire nun die mittleren Glieder mit einander, und dividire das Product mit dem ersten Gliede, man erhält 32, indem $\frac{8 \times 16}{4} = {}^{128}/_4 = 32$, oder $x = \frac{8 \times 16}{4} = 32$; es ist demnach die Zahl 32 die gesuchte vierte geometrische Proportionalzahl.

Probe:

1) Anstatt x setze man die gefundene Zahl 32 als das vierte Glied der Proportion, man erhält nun:

$$4 : 8 = 16 : 32;$$

2) In einer jeden geometrischen Proportion ist das Product der äusseren Glieder gleich dem Producte der mittleren Glieder, und das erste Glied ist im zweyten Gliede so oft enthalten, als das dritte im vierten. Daher multiplicire man zur Probe entweder die äusseren, und dann auch die mittleren Glieder mit einander, und sehe, ob die Producte gleich sind, oder aber man dividire in beiden Verhältnissen das Hinterglied mit dem Vordergliede, und sehe, ob man beiderseits den nämlichen Exponenten erhält, um zu erkennen, ob man gefehlt hat oder nicht.

In diesem Beyspiele ist $4 \times 32 = 128$, und $8 \times 16 = 128$, daher ist $4 \times 32 = 8 \times 16$; ferner 4 ist in 8, und 16 in 32 zweymal enthalten, weßhalb die gefundene Zahl 32 wirklich die verlangte vierte Proportionalzahl ist.

II. Beyspiel:

Es sey 100 das erste, 6000 das zweyte, und 300

das vierte Glied einer solchen Proportion, und es soll das dritte Glied gefunden werden.

Auflösung:

1) Man bezeichne das unbekannte Glied mit x, und setze die Proportion „100 : 6000 = x : 300;"

2) Es ist nun $x = \frac{100 \times 300}{6000} = {}^{30000}/_{6000}$ = 5, d. h., man erhält das dritte Glied, wenn man die äusseren Glieder mit einander multiplicirt, und das Product mit dem zweyten Gliede dividirt, wodurch die Zahl 5 gefunden wird; indem 100 : 6000 = 5 : 300.

Die Probe würde hier auf die vorige Weise angestellet werden.

Anmerkung: 1) Die nämlichen Regeln, die in diesen Aufgaben hinsichtlich der arithmetischen und geometrischen Proportionen in Beyspielen mit ganzen Zahlen in Anwendung gebracht wurden, gelten, wie man offenbar sieht, auch in jenen Fällen, wo die gegebenen Glieder Brüche sind.

2) Die Aufgabe, wie in einer stättigen geometrischen Proportion zu zwey gegebenen Zahlen die dritte geometrische Proportionalzahl gefunden wird, will ich im III. Theile auflösen, nachdem ich da vorhin gezeigt habe, wie Zahlen zum Quadrate erhoben, und in Zahlen die Quadratwurzeln ausgezogen werden.

3) Die arithmetische Proportion kömmt bey den Rechnungsfällen des gemeinen Lebens selten, im Gegentheile aber die geometrische Proportion unausgesetzt vor. Wenn ich daher bloß sage: „Verhältniß, Proportion", so verstehe ich allezeit das geometrische Verhältniß, die geometrische Proportion; will ich aber von dem arithmetischen Verhältnisse und der arithmetischen Proportion reden, so werde ich auch ausdrücklich sagen: „arithmetisches Verhältniß, arithmetische Proportion."

§. 56.

Einige Eigenschaften der Proportion.

a) In einer jeden Proportion, wie dieses schon erwähnt wurde, ist das Product

der äusseren Glieder gleich dem Producte der mittleren Glieder.

Ist die Proportion stättig, so multiplicire man das mittlere Glied einmal mit sich selbst, indem man es zweymal als Factor setzt.

Ein doppelter Ausdruck von einerley Größe nennt man eine Gleichung. Wie also immer zwey Ausdrücke einander gleich sind, und sie somit eine und die nämliche Größe bezeichnen, so hat man das, was eine Gleichung genannt wird.

Es lassen sich deßhalb alle Proportionen in Gleichungen verwandeln; indem bey denselben das Product der äusseren Glieder immerhin dem Producte der mittleren Glieder gleich ist. Diese Gleichheit der beiderseitigen Ausdrücke wird durch das bekannte Gleichheitszeichen (=) ausgedrückt.

Es wird z. B. die Proportion „4 : 8 = 3 : 6" auf diese Weise in die Gleichung „4 × 6 = 8 × 3" verwandelt.

b) Ist in einer Proportion das zweyte Glied eben so groß, kleiner, oder größer, als das erste, so ist dann auch das letzte oder vierte Glied eben so groß, kleiner, oder größer als das dritte Glied, wie dieses aus nachstehenden Beyspielen ersichtlich ist:

a) 4 : 4 = 8 : 8
b) 8 : 2 = 16 : 4
c) 3 : 6 = 5 : 10

Eine Proportion besteht in der Gleichheit zweyer Verhältnisse, und zwey Verhältnisse sind gleich, wenn sie, im Falle man die Division in der nämlichen Ordnung vornimmt, gleiche Exponenten haben; indem man dann mit Wahrheit sagen kann „das erste Glied ist im zweyten Gliede so oft enthalten, als das dritte Glied im vierten."

In der ersten dieser drey Proportionen ist das zweyte Glied gleich dem ersten, und deßwegen der Exponent des Verhältnisses gleich 1; damit nun der

Exponent des zweyten Verhältnisses auch gleich 1 ist, so muß auch das vierte Glied dem dritten gleich seyn.

In der zweyten Proportion ist das zweyte Glied kleiner als das erste, und somit der Exponent des ersten Verhältnisses ein ächter Bruch; dieser Bruch ist auch Exponent des zweyten Verhältnisses, also muß auch das vierte Glied kleiner seyn als das dritte, weil nur die kleinere Zahl mit der größeren dividirt zum Quotienten einen ächten Bruch giebt.

In der dritten Proportion ist das zweyte Glied größer als das erste, und somit der Exponent des ersten Verhältnisses ein unächter Bruch; dieser Bruch ist zugleich Exponent des zweyten Verhältnisses, also muß auch das vierte Glied größer seyn als das dritte, weil nur die größere Zahl mit der kleineren dividirt zum Quotienten einen solchen unächten Bruch giebt, dessen Zähler größer ist, als der Nenner.

In der ersten Proportion ist $4 = 4$, und $8 = 8$; in der zweyten ist $2 < 8$, und $4 < 16$; endlich in der dritten Proportion ist $6 > 3$, und $10 > 5$.

§. 57.

Bestimmung, ob zwey Dinge zusammen in einem mathematischen Verhältnisse stehen oder nicht.

Sind zwey Dinge so mit einander verbunden, daß durch die Vergleichung die Größe eines Dinges aus dem andern bestimmt werden kann, so sagt man, die Dinge stehen zusammen in einem mathematischen Verhältnisse.

Sind sie aber der Art, daß mittels der Vergleichung keines durch das andere bestimmt werden kann, dann stehen sie zusammen in keinem mathematischen Verhältnisse.

Die Größe der Arbeit bestimmt z. B. die Größe des Lohnes; die Menge und Güte (die Quantität und Qualität) der angekauften Waare bestimmt die Größe der dafür zu leistenden Bezahlung; diese Größen stehen demnach zusammen in einem mathemathi-

schen Verhältnisse, indem mittels der angestellten Vergleichung eine durch die andere bestimmt werden kann.

Dagegen kann ich z. B. aus dem bekannten Werthe eines gewißen Weines nicht berechnen, was etwa eine Klafter Holz kosten wird; indem diese Größen zusammen in keinem mathematischen Verhältnisse stehen, und also mittels der Vergleichung keine durch die andere bestimmt werden kann.

§. 58.

Bestimmung, ob zwey Größen zusammen in einem geraden oder umgekehrten mathematischen Verhältnisse stehen.

Wenn die Dinge als Größen betrachtet zusammen in einem mathematischen Verhältnisse stehen, so tritt noch der zweyfache Fall ein, daß entweder mit der Zunahme eines Dinges auch wieder die Zunahme des anderen, oder umgekehrt mit der Zunahme des ersten die Abnahme des andern verbunden ist; daher sagt man:

a) Zwey Größen stehen zu einander im geraden Verhältnisse, wenn mit der Zunahme der einen die Zunahme der anderen, und mit der Abnahme der ersten die Abnahme der zweyten verbunden ist.

Durch angestellte Vergleichung wird man finden, daß nachstehende Dinge, die man als Größen betrachtet, im geraden Verhältnisse stehen, weil man immer sagen kann: „je mehr, desto mehr — je größer, desto größer rc."

1) Die Menge der Waaren und die Größe der dafür zu leistenden Bezahlung;

2) Der Zins mit der Größe des Kapitals, der Länge der Zeit, während welcher das Kapital aufgelegt ist, und mit den Procenten;

3) Die Anzahl der Arbeiter mit ihrer Verrichtung und dem Lohne dafür;

4) Die Größe der Verrichtung mit der dazu erfoderlichen Zeit;

5) Verschiedene Gewichte, Längen-, Getraid-, Wein- Maaße, verschiedene Geldsorten zu einander ꝛc.

b) Wird hingegen durch die Zunahme der ersten Größe die Abnahme der zweyten, und durch die Abnahme der ersten die Zunahme der anderen bestimmt, so stehen die Größen zusammen im umgekehrten Verhältnisse.

Durch die angestellte Vergleichung wird man finden, daß nachstehende Dinge zusammen im umgekehrten Verhältnisse stehen, weil man immer sagen muß „je mehr, desto weniger — je größer, desto kleiner ꝛc.

1) Bey einerley Arbeit die Anzahl der Arbeiter, und die dazu erfoderliche Zeit;

2) Die Länge und Breite des zu einem Kleide erfoderlichen Tuches;

3) Die Anzahl der Menschen mit der Zeit, in welcher sie einen gewißen Vorrath von Lebensmitteln aufzehren;

4) Das Kapital mit der Zeit, um den nämlichen Zins zu geben;

5) Die Anzahl der wöchentlichen Tage und der täglichen Stunden, die man verwendet, um eine gewiße Arbeit zu vollenden, mit der Zeit, welche in Monaten ausgedrückt wird ꝛc.

Anmerkung: Ob zwey Größen im geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehen, muß aus den Größen selbst durch die angestellte Vergleichung erkannt werden. Von jenen Fällen, wo das Verhältniß z. B. aus gewißen Lehrsätzen erkannt wird, ist hier die Rede nicht.

§. 59.

Lehnsatz:

Stehen zwey Größen zusammen im geraden Verhältnisse, so sind jede zwey beliebige Theile der ersten Größe mit den beiden entsprechenden — correspondirenden Theilen der anderen Größe gerade proportionirt.

Unter dem Ausdrucke „gerade proportionirt“ versteht man jene Ordnung der Glieder, kraft welcher

in der Proportion dem ersten Gliede das dritte, und dem zweyten das vierte Glied entspricht, wo also das erste Glied das dritte, und das zweyte das vierte Glied bestimmt.

Wenn z. B. 100 fl. Kapital 5 fl. Zins geben, so geben 600 fl. Kapital unter den nämlichen Bedingungen 30 fl. Zins; daher erhält man diese Proportion:
100 fl. K. : 600 fl. K. = 5 fl. Z. : 30 fl. Z. oder
100 : 600 = 5 : 30

Dem ersten Gliede entspricht hier das dritte, und dem zweyten das vierte Glied. Der Exponent der beiden Verhältnisse ist 6, indem 100 fl. Kapital in 600 fl. Kapital, wie 5 fl. Zins in 30 fl. Zins sechsmal enthalten ist, oder 100 in 600 ist sechsmal, und 5 in 30 ist auch sechsmal enthalten, da man das Verhältniß solcher gleichartigen durch einerley Maaß bestimmten Größen durch das Verhältniß bloßer Zahlen ausdrücken kann (§. 50. d.).

Um deswillen sind die beiden Zahlen, welche das Kapital darstellen, mit den beiden Zahlen, welche den Zins ausdrücken, und somit den beiden ersteren entsprechen, gerade proportionirt.

§. 60.

Lehnsatz:

Stehen zwey Größen zusammen im umgekehrten Verhältnisse, so sind jede zwey beliebige Theile der ersten Größe mit den beiden correspondirenden Theilen der anderen Größe umgekehrt proportionirt.

Unter dem Ausdrucke „umgekehrt proportionirt“ versteht man jene Ordnung der Glieder, kraft welcher in der Proportion dem ersten Gliede das vierte, und dem zweyten das dritte Glied entspricht, wo also das erste Glied das vierte, und das zweyte Glied das dritte bestimmt.

Wenn z. B. 100 Menschen einen gewißen Vorrath von Lebensmitteln in 12 Tagen verzehren, so werden 200 Menschen den nämlichen Vorrath in 6

Tagen aufzehren; um deswillen erhält man diese Proportion:

100 M. : 200 M. = 6 T. : 12 T. oder
100 : 200 = 6 : 12

Dem ersten Gliede entspricht hier das vierte, und dem zweyten das dritte Glied. Der Exponent der beiden Verhältnisse ist 2, indem sowohl die Zahl 100 in 200, als auch 6 in 12 zweymal enthalten ist, und somit 200 Menschen mit 100 Menschen, und 12 Tag mit 6 Tag dividirt beiderseits zum Quotienten die Zahl 2 geben (I. §. 61. c.).

Aus diesem Grunde sind die beiden Zahlen, welche die Anzahl der Personen ausdrücken, mit den entsprechenden Zahlen, welche die Zeit bezeichnen, umgekehrt proportionirt.

§. 61.

Aufgabe, zu drey gegebenen benannten Zahlen die vierte zu finden, wenn vorausgesetzt wird, daß die Größen zusammen im geraden Verhältnisse stehen.

Auflösung:

Man untersuche mittels der angestellten Vergleichung, ob die beiden Größen in dem im §. 58. bey a. und b. gegebenen Sinne im geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehen, und beobachte dann im ersten Falle folgende Regeln:

1) Weil in der Voraussetzung, daß Größen im geraden Verhältnisse stehen, die beiden Theile der ersten Größe mit den correspondirenden Theilen der anderen Größe gerade proportionirt sind, so ordne man in der Proportion die Größen so, daß die gleichartigen immer zusammen in das nämliche Verhältniß kommen, und zugleich dem ersten Gliede das dritte, und dem zweyten das vierte Glied entspricht.

2) Wenn die gleichartigen Größen noch nicht gleich-

gleichnamig sind (I. 78. e), so reducire man sie nach den im I. Theile in dem §. 90. und §. 91. aufgestellten Regeln, damit sie durch das nämliche Maaß ausgedrückt werden, und somit ihr Verhältniß durch das Verhältniß bloßer Zahlen dargestellt werden kann (§. 50. d).

Diese Reduction geschieht nur in jenem Verhältnisse, wo die beyden Glieder bekannt sind. In jenem Verhältnisse hingegen, wo das unbekannte Glied vorkömmt, drückt dann dieses Einheiten jener Benennung aus, die das darinn vorkommende bekannte Glied bezeichnet.

3) Hat man auf diese Weise die Proportion auf eine Proportion von bloßen Zahlen reducirt, so suche man nach Vorschrift des §. 55 a. die unbekannte Größe, welche durch x ausgedrückt wird.

I. Beyspiel:

Wenn 3 Ellen einer gewißen Waare 18 fl. kosten, was kosten 36 Ellen der nämlichen Waare?

Auflösung:

1) Diese beyden Größen stehen im geraden Verhältnisse, weil ich sagen muß, je mehr Ellen ich kaufe, eine desto größere Summe muß ich dafür bezahlen.

2) Man setze also an die Stelle der beyden ersten Glieder der Proportion 3 Ellen und 36 Ellen, und der Ordnung nach an die Stelle der beyden letzten Glieder die entsprechenden Werthe; daher

3 Ellen : 36 Ellen = 18 fl. : x fl.

3) Man lasse dem Gesagten gemäß die Benennungen „Ellen, Gulden“ weg, und schreibe die Proportion in unbenannten Zahlen an:

$$3 : 36 = 18 : x.$$

4) Weil hier das vierte Glied fehlt, so multiplicire man die mittleren Glieder, und dividire das Product

mit dem ersten Gliede, d. h., $x = \frac{36 \times 18}{3} =$ 216; daher kosten nun 36 Ellen 216 fl.

P r o b e:

Man nehme eine jener benannten Zahlen, die vorhin bekannt war, als unbekannt an, z. B. 3 Ellen, und man hat nun diese Aufgabe aufzulösen:

Um 216 fl. bekömmt man 36 Ellen einer gewißen Waare, wie viel Ellen der nämlichen Waare erhält man um 18 fl.?

A u f l ö s u n g:

1) Weil die Größen zusammen im geraden Verhältnisse stehen, so setze man diese Proportion an:

216 fl. : 18 fl. = 36 Ellen : x Ellen, daher auch

$$216 : 18 = 36 : x;$$

weßwegen $x = \frac{18 \times 36}{216} = 3$, d. h., um 18 fl. bekömmt man unter dieser Bedingung 3 Ellen der nämlichen Waare. Man ersieht nun die Richtigkeit der ersten Auflösung daraus, daß man jene Größe wieder gefunden hat, die man bey der Probe als unbekannt angenommen hat.

II. B e y s p i e l:

Wie viel Gulden kosten 7 Loth Gewürz, wenn ein ½ Pfund Gewürz 5 fl. kostet?

A u f l ö s u n g:

1) Die Größen stehen hier zusammen im geraden Verhältnisse, indem die zu bezahlende Summe desto größer ist, je mehr Gewürz gekauft wird, man erhält also diese Proportion:

½ Pf. Gew. : 7 Loth Gew. = 5 fl. : x fl.

2) Damit das Verhältniß der beyden ersten Größen durch das Verhältniß bloßer Zahlen ausgedrückt wird, reducire man die beyden Glieder des ersten Verhältnisses so, daß sie gleichnamig werden, und dadurch die Größen durch einerley Maaß bestimmt sind.

Es giebt ½ Pfund 16 Loth, da 1 Pfund 32 Loth hat (I. §. 85. Tab. A.), daher verhalten sich

16 Loth Gew. : 7 Loth Gew. = 5 fl. : x fl.

16 : 7 = 5 : x

und deßwegen ist $x = \frac{7 \times 5}{16} = {}^{35}/_{16} = 2\,{}^{3}/_{16}$ fl.

Den Bruch ³/₁₆ fl. reducire man auf Kreutzer, man erhält 11¼ kr. = 11 kr. 2 Häller (I. §. 90.); es kosten also 7 Loth Gewürz 2 fl. 11 kr. 2 Häller.

Die Probe wird hier eben so, wie im vorigen Beyspiele gemacht.

§. 62.

Aufgabe, zu 3 gegebenen benannten Zahlen die vierte zu finden, wenn vorausgesetzt wird, daß die Größen zusammen im umgekehrten Verhältnisse stehen.

Auflösung:

Findet man durch die angestellte Vergleichung, daß die Größen zusammen im umgekehrten Verhältnisse stehen, so suche man das unbekannte Glied der Proportion auf folgende Weise:

1) Weil in diesem Falle die beiden ersten Theile mit den correspondirenden Theilen umgekehrt proportionirt sind, so ordne man in der Proportion die Größen so, daß die gleichartigen immer zusammen in das nämliche Verhältniß kommen, und zugleich dem ersten Gliede das vierte, und dem zweyten das dritte entspricht.

2) Wenn die gleichartigen Größen noch nicht gleichnamig sind, so reducire man sie, damit sie durch das nämliche Maaß ausgedrückt werden, und somit ihre Größe durch das Verhältniß bloßer Zahlen dargestellt werden kann.

Diese Reduction geschieht hier ebenfalls nur in jenem Verhältnisse, wo die beiden Glieder bekannt

sind. In jenem Verhältnisse hingegen, wo das unbekannte Glied vorkömmt, drückt dieses Einheiten jener Benennung aus, die das darinn vorkommende bekannte Glied bezeichnet.

3) Hat man auf diese Weise die Proportion auf eine Proportion von bloßen Zahlen reducirt, so suche man nach Vorschrift des §. 55. b. das unbekannte Glied.

I. Beyspiel:

Wenn 200 Menschen einen gewißen Vorrath von Lebensmitteln in 8 Monaten aufzehren, wann werden denselben 400 Menschen aufzehren?

Auflösung:

1) Die Größen stehen hier im umgekehrten Verhältnisse, weil mehrere Personen den nämlichen Vorrath von Lebensmitteln in einer kürzeren Zeit aufzehren werden; um deswillen sind dieselben zu einander umgekehrt proportionirt.

2) Man setze also die Proportion so an, daß die gleichartigen Größen jederzeit die Glieder des nämlichen Verhältnisses bilden, daher erhält man diese Proportion:

$$200 \text{ P.} : 400 \text{ P.} = x \text{ Mon.} : 8 \text{ Mon.}$$

3) Die Proportion dieser benannten Zahlen bringe man auf eine Proportion bloßer Zahlen (§. 50. d.), man erhält:

$$200 : 400 = x : 8$$

Daher ist $x = \frac{200 \times 8}{400} = 4$ (55. b.), d. h., in 4 Monaten werden 400 Personen diesen Vorrath von Lebensmitteln aufzehren.

Probe:

Zur Probe nehme man eine jener Größen, welche bey der ersten Aufgabe gegeben war, als unbekannt an, etwa 200 Menschen, man hat nun diese Aufgabe aufzulösen:

Mit einem gewißen Vorrathe von Lebensmitteln können 400 Personen 4 Monate hindurch ernährt werden; wie viele Personen können damit 8 Monate hindurch ernährt werden?

Auflösung:

1) In einer kürzeren Zeit können vom nämlichen Vorrathe von Lebensmitteln mehrere Menschen ernähret werden, die Größen stehen also zusammen im umgekehrten Verhältnisse, und müssen deßhalb auf folgende Weise als Glieder der Proportion gesetzt werden:

4 Mon. : 8 Mon. = x P. : 400 P.

2) Bringt man diese Proportion auf eine Proportion mit unbenannten Zahlen, und sucht man nach der bekannten Regel das dritte Glied, so erhält man 200, indem $x = \frac{4 \times 400}{8} = 200$, d. h., von diesem Vorrathe können 200 Menschen 8 Monate hindurch ernährt werden; weßhalb die vorhin angestellte Berechnung richtig ist.

II. Beyspiel:

Von einem Stück Tuche, das 10 Viertel Ellen breit ist, gehören zu einem gewißen Kleide 4 ½ Ellen; wie viel Ellen sind dazu nöthig, wenn das Stück Tuch nur 2 Ellen breit ist?

Auflösung:

1) Je breiter das Tuch ist, desto weniger Ellen hat man zum nämlichen Kleide nöthig, diese Größen stehen also zusammen im ungekehrten Verhältnisse, weßhalb man diese Proportion erhält:

10 Viertel : 2 Ellen = x Ellen : 4 ½ Ellen.

2) Weil die Glieder des ersten Verhältnisses ungleichnamig sind, so reducire man die ganzen Ellen auf Viertel, oder diese auf ganze Ellen, es geben 2 Ellen 8 Viertel, daher verhalten sich

10 Viertel : 8 Viertel = x Ellen : 4 ½ Ellen.

3) Läßt man in beiden Verhältnissen die beygesetzten Benennungen weg, so erhält man $5\frac{5}{8}$ Ellen, d. h., dann sind zum nämlichen Kleide $5\frac{5}{8}$ nöthig; indem $x = (10 \times 4\frac{1}{2}) : 8 = (4\frac{1}{2} \times 10) : 8 = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$.

Die Probe wird hier eben so, wie im vorigen Beyspiele gemacht.

I. Zusatz: Weil bey diesen Aufgaben die Auflösung dadurch geschieht, daß die Größen, welche zusammen in einem geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehen, in eine Proportion gesetzt werden, wo allezeit vier Glieder vorkommen, und aus 3 bekannten Gliedern in Gemäßheit der aufgestellten Regeln das unbekannte Glied, es mag an der dritten oder vierten Stelle stehen, gefunden werden kann, so nennt man dieselben Aufgaben der Regeldetri, gleichwie die Regel, nach welcher die Auflösung geschieht, die Regeldetri (Regula de tribus Terminis, regula aurea ihrer Brauchbarkeit wegen) genannt wird.

II. Zusatz: Man unterscheidet die ordentliche oder gerade Regeldetri (Regula trium directa), und die verkehrte oder umgekehrte Regeldetri (Regula trium inversa), je nachdem die Größen zusammen im geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehen; dieser Unterschied bezieht sich aber nur, wie es aus den in diesem und in dem vorigen §. angeführten Auflösungen ersichtlich ist, auf die Ordnung der Glieder, und nicht auf die Regel selbst, indem bey der geraden Regeldetri die unbekannte Größe an die vierte Stelle der Proportion, hingegen aber bey der umgekehrten an die dritte Stelle zu stehen kömmt.

III. Zusatz: Man kann beide Verhältnisse umkehren, ohne daß die Gleichheit derselben aufgehoben wird; hat man z. B. die Proportion „$2 : 4 = 8 : 16$“, so kann man auch mit Wahrheit sagen „$4 : 2 = 16 : 8$, indem 2 mit 4 dividirt den Quotienten $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, und 8 mit 16 dividirt zum Quotienten $\frac{8}{16}$, somit ebenfalls die Zahl $\frac{1}{2}$ giebt, und also die Proportion nicht verändert worden ist.

Will man daher bey der umgekehrten Regeldetri die unbekannte Größe an der vierten Stelle haben, so kehre man die Verhältnisse um, indem man bey beiden das Vorderglied an die Stelle des Hintergliedes, und dieses an die Stelle des Vordergliedes setzt; das vierte unbekannte Glied wird dann dadurch gefunden, daß man das Product der mittleren Glieder mit dem ersten Gliede dividirt, während in diesem Falle ebenfalls wieder dem ersten Gliede das vierte und dem zweyten das dritte Glied entspricht.

Es sey z. B. die Aufgabe gegeben: „600 Personen vollenden ein gewißes Geschäft in 8 Monaten; wie viele Monate werden dazu 1200 Personen verwenden?

Verfährt man nun, indem die Größen im umgekehrten Verhältnisse stehen, nach Vorschrift dieses §., so erhält man diese Proportion:

600 P. : 1200 P. = x M. : 8 M., daher

600 : 1200 = x : 8

Sucht man nun den aufgestellten Regeln gemäß x, so erhält man 4 Mon., indem $x = \frac{600 \times 8}{1200} = 4$.

Kehrt man hingegen die Proportion um, um die unbekannte Größe an die vierte Stelle zu bringen, so erhält man diese Proportion:

1200 P. : 600 P. = 8 M. : x M., daher

1200 : 600 = 8 : x

Sucht man nun wieder x, so erhält man das nämliche Resultat, indem auch hier $x = \frac{600 \times 8}{1200}$ $= 4$.

Es werden also 1200 Personen zu diesem Geschäfte 4 Monat verwenden.

IV. Zusatz: Ordnet man bey der geraden und verkehrten Regeldetri die Glieder so, daß an der vierten Stelle jederzeit die unbekannte Größe steht, so nehmen die bey der geraden Regeldetri vorkommenden Größen in der Proportion folgende Stellen ein:

An der vierten Stelle steht die unbekannte Größe — an der dritten die mit ihr

gleichartige bekannte Größe — an der zweyten jene Größe, welcher die unbekannte Größe entspricht, durch die somit diese letztere bestimmt wird, und endlich an der ersten Stelle steht jene Größe, welcher die an der dritten Stelle stehende Größe entsprechend ist, und welche somit diese letztere bestimmt. (§. 61. I. und II. Beysp.).

Bey der umgekehrten Regeldetri hingegen, im Falle das unbekannte Glied an der vierten Stelle steht, nehmen die vorkommenden Größen in der Proportion folgende Stellen ein:

An der vierten Stelle steht die unbekannte Größe — an der dritten die mit ihr gleichartige bekannte Größe — an der zweyten Stelle jene Größe, welche die an der dritten Stelle vorkommende Größe bestimmt, und endlich an der ersten Stelle steht jene Größe, die die unbekannte Größe bestimmt, welcher somit diese letztere entsprechend ist. (§. 62. Zus. III.)

V. Zusatz: In den bisher für die beiden Fälle, wo die Größen zusammen im geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehen, angeführten Beyspielen war immer die Voraussetzung, daß die gesuchte Größe mit der ihr gleichartigen eine gleiche Benennung habe, weßhalb nur verlangt wurde, daß in jenem Verhältnisse, wo die beiden bekannten benannten Zahlen vorkommen, dieselben, im Falle sie nicht gleichnamig sind, reducirt werden sollen.

Sind aber andere Einheiten zu finden, als in der Bedingung gegeben sind, so müssen dann auch die Glieder jenes Verhältnisses, wo x vorkömmt, dadurch gleichnamig gemacht werden, daß man die darinn vorkommende bekannte benannte Zahl auf solche Einheiten reducirt, die mit den gesuchten Einheiten gleichnamig sind (I. §. 90. und §. 91.).

Es sey z. B. die Aufgabe gegeben: Wie viel Gulden kosten 6 Centner einer gewißen Waare, wenn ein Loth davon 4 Häller kostet? In dieser Aufgabe ver-

langt man den Werth der angekauften Waare in Gulden, und in der Bedingung kommen nur Häller vor; daher reducire man die Häller auf Gulden, dieselben geben $\frac{1}{120}$ fl., zugleich reducire man auch die Centner auf Loth, oder diese auf Centner, es ist 1 Loth = $\frac{1}{3200}$ Centner.

Daher erhält man nun die Aufgabe, welche den im §. 61. aufgestellten Regeln gemäß aufgelöst wird: „Wenn $\frac{1}{3200}$ Centner $\frac{1}{120}$ fl. kostet, wie viel Gulden kosten 6 Centner?

Anmerkung: 1) Wie die Auflösung solcher Aufgaben geschiebt, bey welchen in dem nämlichen Gliede Einheiten verschiedenen Ranges, z. B. Gulden, Kreutzer und Häller vorkommen, wird in den folgenden §§. gezeigt werden.

2) Es wäre hier der Ort, wo auch die Auflösung der Aufgaben der so genannten zusammengesetzten Regeldetri gezeigt werden sollte. Da sich aber sowohl diese Aufgaben, als auch jene der einfachen Regeldetri mittels des Reesischen Ansatzes auf eine einfache Weise auflösen lassen, so wird davon in den folgenden Abschnitten ausführlich die Rede seyn, und da zugleich die Anwendung der Regeldetri auf mehrere im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsfälle gemacht werden.

§. 63.

Wiederholung in Fragen.

1) Was nennt man ein arithmetisches und was ein geometrisches Verhältniß; wodurch unterscheiden sich diese zwey Verhältnisse von einander?

2) Was versteht man unter dem Vorder- und Hintergliede, und was unter dem Exponenten sowohl des arithmetischen, als auch des geometrischen Verhältnisses?

3) Welches Zeichen hat man zur Bezeichnung des arithmetischen und geometrischen Verhältnisses eingeführet?

4) Warum müssen beym arithmetischen und geometrischen Verhältnisse die Glieder gleichartig seyn?

5) Aus welchem Grunde ist das arithmetische und geometrische Verhältniß zweyer gleichartigen, durch

einerley Maaß bestimmten Größen dem Verhältnisse jener Zahlen gleich, die ihre Größe ausdrücken?

6) Wie erhält man beym arithmetischen und geometrischen Verhältnisse den Exponenten des Verhältnisses, und wie erkennt man, ob zwey oder mehrere arithmetische und geometrische Verhältnisse einander gleich oder ungleich sind?

7) Warum bleibt das geometrische Verhältniß unverändert, wenn man die beiden Glieder desselben mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt; nach welcher Regel kann man das geometrische Verhältniß zweyer Brüche, die Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, auf das Verhältniß ganzer Zahlen zurückführen?

8) Was ist die arithmetische und geometrische Proportion; welche Glieder werden die äusseren, die mittleren, und welche die homologen oder gleichnamigen Glieder genannt?

9) Welche arithmetische und geometrische Proportion wird stättig und welche dißcret genannt?

10) Nach welcher Regel erhält man bey einer arithmetischen dißcreten Proportion, wie auch bey einer stättigen arithmetischen Proportion das unbekannte Glied?

11) Wie findet man bey einer dißcreten geometrischen Proportion das unbekannte Glied, wenn dasselbe ein äusseres oder mittleres Glied ist?

12) Woher kann man bey 4 gegebenen unbenannten Zahlen erkennen, ob sie der Ordnung nach eine arithmetische oder geometrische Proportion bilden oder nicht?

13) Was nennt man eine Gleichung, und nach welcher Regel können alle arithmetischen und geometrischen Proportionen in Gleichungen verwandelt werden?

14) Was will dieses sagen, zwey Dinge stehen zusammen in einem mathematischen Verhältnisse, und wann stehen zwey Größen zusammen in einem geraden oder verkehrten Verhältnisse?

15) Nach welchen Regeln wird zu drey gegebenen

benannten Zahlen die vierte gefunden, wenn vorausgesetzt wird, daß die Größen im geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehen?

16) Was versteht man unter der geraden und was unter der verkehrten Regeldetri; warum wird dieselbe Regeldetri (Regula de tribus terminis) genannt?

§. 64.

Beyspiele zur Uebung.

I.

Jemand bezieht in dem ersten Jahre 2470 fl., und in dem zweyten 1843 fl.; wie groß ist demnach davon der mittlere Betrag, da es bekannt ist, daß derselbe das mittlere Glied jener stättigen arithmetischen Proportion bildet, wo die beiden gegebenen Zahlen die äusseren Glieder sind?

II.

Nach einigen Angaben hält die Länge der Erdachse 1716, und jene des Durchmessers des Aequators 1721 geographische Meilen; wie groß ist nun die arithmetische Mittelzahl zwischen den beiden Achsen der Erde?

III.

Es ist bekannt, daß ein Stein im freyen Falle in der ersten Secunde beynahe 15 Pariser Fuß, und in jeder folgenden Secunde um 30 Fuß mehr, als in der unmittelbar vorhergehenden, zurücklegt, und somit die in den ersten 3 Secunden durchlaufenen Räume der Ordnung nach eine stättige arithmetische Proportion bilden.

Wie weit fällt demnach der Stein in der dritten Secunde, da er in der ersten 15, und in der zweyten 45 Fuß zurücklegt?

IV.

Der Planet Ceres, welcher den 1. Januar 1801 von dem Astronomen Herrn Doctor Piazzi entdeckt wurde, ist zur Zeit seiner Zusammenkunft mit der

Sonne 79'000.000, hingegen aber in seinem Gegenscheine mit derselben nur 37'000.000 Meilen von der Erde entfernt; welche ist demnach die arithmetische Mittelzahl dieser beiden Entfernungen?

V.

Wenn 4 Centner einer gewißen Waare 304 ½ fl. kosten, was kosten 18 Centner der nämlichen Waare?

VI.

Wenn 100 fl. Kapital 5 fl. Zins geben, welchen Zins geben 6425 fl.?

VII.

Wenn 18 Personen eine gewiße Arbeit in 10 Monaten verrichten, wann werden diese Arbeit 12 Personen verrichten?

VIII.

Aus vorgenommenen Versuchen und Beobachtungen weiß man, daß die Bewegung des Schalles, der in einer Secunde, im Falle die Luft ruhig ist, 173 Toisen oder 1038 Pariser Fuß zurücklegt, gleichförmig, und somit die Zeit der Bewegung mit den zurückgelegten Weiten gerade proportionirt ist.

Ueberdieß bewegt sich das Licht mit einer sehr großen Geschwindigkeit, indem sich dasselbe in einer Secunde 72420 Meilen fortpflanzt; um deswillen darf man ohne einen merklichen Fehler immerhin annehmen, daß der Donnerknall in dem nämlichen Augenblicke in einer Wolke erzeugt werde, da man den Blitz sieht.

Wenn nun eine Person von jener Zeit an, als sie den Blitz gesehen hat, 12 Secunden zählet, bis sie den Donnerknall höret, wie weit ist dann die Wetterwolke von derselben entfernt?

IX.

Es wird in der Mechanik bewiesen, daß am geradlinigten Hebel die beiden Kräfte mit ihren Entfernungen vom Ruhepuncte umgekehrt proportionirt sind. Wie schwer muß demnach ein Gewicht seyn, wenn es mit einer Last von 4 Centner im Gleichgewichte

stehen soll, und vorausgesetzt wird, daß der Ruhepunct von der Richtung der Last 2 baier. Fuß, hingegen aber von der Richtung des Gewichtes 3 solche Fuß entfernt ist?

X.

Wird die Höhe zweyer Gegenstände, und zugleich ihr Schatten an dem nämlichen Orte und zur nämlichen Zeit gemessen, so darf man annehmen, daß die beiden ersten Zahlen, welche die Höhen bezeichnen, mit den beiden anderen, welche die Größe des Schattens ausdrücken, gerade proportionirt sind.

Welche Höhe hat demnach ein Thurm, dessen Schatten 600 baier. Fuß lang ist, wenn ein 6 Fuß langer Stab einen Schatten von 9 solchen Schuhen wirft?

II. Abschnitt.

Die Auflösung der verschiedenen Aufgaben der sogenannten Regeldetri nach der Reesischen Verfahrungsweise, und zugleich nach dem gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze.

I.

Einige Erklärungen und Aufgaben in Absicht auf den Reesischen Ansatz.

§. 65.

Reesischer Ansatz

wird jener Ansatz genannt, bey welchem ein Product dem anderen gleich gesetzt wird, und anstatt des gewöhnlichen Gleichheitszeichens ein Verticalstrich gezo-

gen wird, während die Factoren der Producte, anstatt sie mit dem gewöhnlichen Multiplicationszeichen zu verbinden, unter einander gesetzt werden.

Weil man sich dieses Ansatzes mehrentheils nur in jenen Fällen bedient, wo die geometrische Proportion in eine Gleichung verwandelt ist, so kann der Reesische Ansatz auch jener Ansatz genannt werden, wo das Product der äusseren Glieder der geometrischen Proportion jenem der mittleren Glieder mittels des Verticalstriches gleich gesetzt wird (§. 56. a.).

Derselbe ist demnach nichts anderes, als der Ausdruck einer Gleichung; alle links stehenden Zahlen mit einander multiplicirt geben das erste Product, und die rechts stehenden Zahlen ebenfalls mit einander multiplicirt geben das zweyte Product, welches dem ersten gleich ist.

Es sey z. B. die Proportion gegeben:

$$3 : 6 = 4 : 8$$

Verwandelt man diese Proportion in eine Gleichung, indem man das Product der äusseren Glieder gleich setzt jenem der mittleren Glieder, so erhält man:

$$3 \times 8 = 6 \times 4$$

Diese Gleichung setzet man Reesisch an, indem man anstatt des Gleichheitszeichens den Verticalstrich zieht, und die Factoren der beiderseitigen Producte unter einander schreibt, man erhält:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{array}$$

Eine solche Gleichung, welche in Reesischer Form dargestellt wird, wird wieder, wie vorhin, gelesen, nämlich „3 multiplicirt mit 8 ist gleich (äqual) 6 multiplicirt mit 4."

Die Benennung „Reesischer Ansatz — Reesische Regel" ist von dem Namen des Herrn von Rees eines Holländers hergenommen.

Zusatz: Alle Aufgaben, bey welchen durch die Anwendung der Lehre von den geometrischen Proportionen aus dem Verhältnisse der unbekannten Größen

zu gewißen bekannten Größen erstere gefunden werden, nennt man überhaupt Aufgaben der Regeldetri.

Dabey giebt es verschiedene Verfahrungsweisen, indem man bald auf diesem, bald auf einem anderen Wege das verlangte Resultat zu finden suchte.

Ich werde davon nur die Auflösung nach dem Reesischen Ansatze, und dem gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze anführen.

Die erstere ist äusserst bequem und einfach, wie man aus den folgenden Abschnitten ersehen wird, und dient somit dazu, um geschwind die vorgelegten Aufgaben aufzulösen; die letztere hingegen ist mehr dazu geeignet, um sich dadurch in den Stand zu versetzen, die Gründe des Verfahrens einzusehen, welches einigermaaßen schon jetzt geschehen kann, wiewohl es hier der Zweck nicht ist, die Sache wissenschaftlich zu begründen; indem beym gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze die Form der Proportion beybehalten, und somit dabey die Auflösung unmittelbar nach den von der Proportion aufgestellten Lehrsätzen geschieht.

§. 66.

Die Verkleinerungen, die beym Reesischen Ansatze vorgenommen werden können.

Weil beym Reesischen Ansatze mittels des Verticalstriches ein Product dem anderen gleich gesetzt wird, und Gleiches mit Gleichem dividirt wieder Gleiches giebt (I. §. 62. 1.), so kann man immerhin auf beiden Seiten mit der nämlichen Zahl dividiren, ohne daß die Gleichheit der Producte aufgehoben wird.

Dadurch geschieht eine ähnliche Veränderung, wie bey der Verkleinerung der Brüche, welche auf eine kleinere Benennung gebracht werden, wenn man sie, ohne ihren Werth zu veränderen, in kleineren Zahlen ausdrückt (§. 13.).

Die Verkleinerung beym Reesischen Ansatze geschieht auf folgende Weise:

1) Durch Hilfe der im §. 11. aufgestellten Regeln suche man immerhin eine Zahl, mit welcher

man einen Factor, welcher zur linken Seite steht, und zugleich einen zur rechten Seite stehenden Factor ohne Rest dividiren kann.

2) Mit dieser Zahl dividire man wirklich auf beiden Seiten, streiche die Zahlen, die man dividirt, aus, und setze an ihre Stelle die erhaltenen Quotienten.

Der Quotient 1, welcher als Factor nichts multiplicirt (I. §. 61. Zus. II.), wird nicht angeschrieben, ausser zuletzt, wenn keine andere Zahlen mehr vorhanden sind.

Man kann deßhalb auf beiden Seiten gleich viele Nullen, und die nämlichen Zahlen ausstreichen, indem dieses dann eben so viel ist, als auf beiden Seiten mit 10„ 100„ 1000 ꝛc. oder mit den ausgestrichenen Zahlen dividiren; wäre dann in diesem Falle zuletzt keine andere Zahl mehr vorhanden, so müßte wieder 1 als Quotient geschrieben werden.

I. Beyspiel:

Es komme bey Auflösung einer Aufgabe dieser Ansatz vor:

x	36000
400	20

Man streiche auf beiden Seiten, um die erwähnte Verkleinerung vorzunehmen, 2 Nullen aus, und dividire dann beiderseits mit 4, man erhält diesen Ansatz:

x	90
1	20

II. Beyspiel:

Es seyen beym nachstehenden Ansatze die möglichen Verkleinerungen vorzunehmen:

x

x	15
40	20
10	8
1	2
40	50
3	4
20	30
17	19
11	23

Nimmt man hier die möglichen Verkleinerungen vor, indem man beiderseits gleichviel Nullen ausstreicht, dann mit den Zahlen 3 „ 4 „ 5 ꝛc. dividirt, so erhält man diesen Ansatz:

x	3
17	5
11	2
	19
	23

§. 67.

Die beym Reesischen Ansatze vorzunehmende Aufhebung der gemeinen Brüche.

Kommen beym Reesischen Ansatze Brüche vor, so werden dieselben nach folgenden Regeln aufgehoben:

1) Sind die vorkommenden Brüche gemischte Brüche, so richte man sie nach Vorschrift des §. 28. allererst ein.

2) Die Nenner aller ungemischten, und der gemischten Brüche, welche nach Vorschrift des so eben erwähnten §. eingerichtet, und dadurch ebenfalls in der Gestalt ungemischter Brüche dargestellt werden, streiche man auf jener Seite, wo die Brüche stehen, aus, und setze sie auf der anderen Seite als Factoren an eine beliebige Stelle, indem man bey der Multiplication die Stellen der Factoren verwechseln kann.

Beyspiel:

Es sollen im nachstehenden Ansatze die Brüche aufgehoben werden:

x	$4\frac{1}{2}$
$6\frac{2}{3}$	$8\frac{4}{5}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{9}$

Weil in Gemäßheit des angeführten §., wenn man diese Brüche einrichtet, $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$, und $8\frac{4}{5} = \frac{44}{5}$, so schreibe man anstatt der gemischten Brüche die neuen Brüche, in welche sie durch das Einrichten verwandelt wurden:

x	$\frac{9}{2}$
$\frac{20}{3}$	$\frac{44}{5}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{9}$

Die auf der linken Seite stehenden Nenner 3, und 7 setze man auf die rechte Seite hinüber, und die rechts vorkommenden Nenner 2, dann 5, und 9 setze man auf die linke Seite.

Da man öfters die Nenner nicht mehr unter die auf jeder Seite schon vorhandenen Factoren setzen kann, so schreibe man sie neben dieselben hin, und trenne sie davon der Deutlichkeit wegen durch einen Punct:

x	9
2 . 20	44 . 3
5 . 3	5 . 7
9	.

§. 68.

Aufgabe, die beym Reesischen Ansatze vorkommende unbekannte Größe zu finden.

Auflösung:

1) Kommen beym Reesischen Ansatze gemeine Brüche vor, so hebe man dieselben nach Vorschrift des vorigen §. auf.

2) Dann nehme man zugleich nach §. 66. die möglichen Verkleinungen vor.

3) Weil die unbekannte Größe x bey den Aufgaben der Regeldetri, im Falle dieselben mittels des Reesischen Ansatzes aufgelöset werden, immerhin zur linken Seite steht, so multiplicire man alle rechts stehenden Zahlen nach den im I. Theile §. 57. aufgestellten Regeln mit einander.

4) Eben so multiplicire man auch alle bey x zur linken Seite stehenden bekannten Zahlen mit einander.

5) Endlich dividire man das Product der rechts stehenden Zahlen mit dem Producte der links stehenden, man erhält zum Quotienten die gesuchte unbekannte Größe x; bekömmt man dadurch einen unächten Bruch, so ziehe man auch die Ganzen heraus.

Im I. Beyspiele des §. 66. ist x = 1800; indem mittels der vorgenommenen Verkleinerung der gegebene Ansatz in diesen Ansatz verwandelt wurde:

x	90
1	20

daher ist $x = \frac{90 \times 20}{1} = {}^{1800}/_{1} = 1800.$

Im II. Beyspiele des nämlichen §. ist $x = 70\,{}^{20}/_{187}$; indem der gegebene Ansatz in diesen verwandelt wurde:

x	3
17	5
11	2
	19
	23

daher ist $x = \frac{3 . 5 . 2 . 19 . 23}{17 . 11} = {}^{13110}/_{187} = 70\,{}^{20}/_{187}$

Nimmt man im Beyspiele des §. 67., wo die Brüche aufgehoben worden sind, auch die möglichen Verkleinerungen nach §. 66. vor, so erhält man nachstehenden Ansatz, wo die unbekannte Größe x gleich $7\,{}^{7}/_{10}$ ist:

x	11
2	7
5	

daher ist $x = \frac{11.7}{2.5} = {}^{77}/_{10} = 7\,{}^{7}/_{10}$.

§. 69.

Aufgabe, die gemeinen Brüche mittels des Reesischen Ansatzes mit einander zu multipliciren.

Auflösung:

Weil die Factoren mit einander multiplicirt das Product geben, so ist dieses immerhin sämmtlichen Factoren mit einander multiplicirt gleich.

Um demnach die gemeinen Brüche Reesisch mit einander zu multipliciren, verfahre man nach folgenden Regeln:

1) Man ziehe den Verticalstrich, setze links den Buchstaben x, welcher einsweilen das gesuchte Product ausdrückt, und setze alle Factoren, die mit einander multiplicirt werden sollen, auf die rechte Seite.

2) Nun hebe man die Brüche auf, indem man die ungemischten vorhin einrichtet, alle Nenner ausstreichet, und sie auf die linke Seite herüber setzet (§. 67.).

3) Man nehme nun nach §. 66. die möglichen Verkleinerungen vor, und suche nach Vorschrift des vorigen §. die unbekannte Größe x, welche das verlangte Product ausdrückt.

I. Beyspiel:

Es sey $8\,{}^{3}/_{7}$ mit $9\,{}^{3}/_{4}$ zu multipliciren (§. 37.).

Auflösung:

1) Man ziehe den Verticalstrich, schreibe links x, und rechts die beiden gegebenen Brüche unter einander:

$$\begin{array}{c|l} x & 8\,^5/_7 \\ & 9\,^3/_4 \\ \hline \end{array}$$

2) Man hebe die Brüche auf, und suche dann die Größe x, welche das verlangte Product ausdrückt:

$$\begin{array}{c|l} x & ^{59}/_7 \\ & ^{39}/_4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} x & 59 \\ 7 & 39 \\ 4 & \\ \hline \end{array}$$

daher ist $x = \frac{59 \,.\, 39}{7 \,.\, 4} = {}^{2301}/_{28} = 82\,^5/_{28}$.

II. Beyspiel:

Man multiplicire die Brüche $2\,^1/_2$, $3\,^2/_5$, $4\,^5/_7$ mit einander (§. 38. II. Beysp.).

Auflösung:

1) Man ziehe den Verticalstrich, schreibe links x, und rechts die 3 gegebenen Factoren:

$$\begin{array}{c|l} x & 2\,^1/_2 \\ & 3\,^2/_5 \\ & 4\,^5/_7 \\ \hline \end{array}$$

2) Man hebe die Brüche auf, indem man sie einrichtet, und die Nenner auf die linke Seite setzet, und nehme dann die möglichen Verkleinerungen vor:

$$\begin{array}{c|l} x & 5 \\ 2 & 17 \\ 5 & 33 \\ 7 & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} x & \\ 2 & 17 \\ 7 & 33 \\ \hline \end{array}$$

daher ist $x = \frac{17 \,.\, 33}{2 \,.\, 7} = {}^{561}/_{14} = 40\,^1/_{14}$.

§. 70.

Aufgbe, gemeine Brüche mittels des Reesischen Ansatzes mit einander zu dividiren.

Auflösung:

Weil der Quotient ausdrückt, wie oft der Divisor im Dividend enthalten ist, so erhält man immer wieder den Dividend, wenn man den Quotienten mit dem Divisor, oder diesen mit jenem multiplicirt (I.

§. 61. Zus. I.); daher geschieht die Division durch Hilfe des Reesischen Ansatzes nach folgenden **Regeln**:

1) Man ziehe den Verticalstrich, setze links den gesuchten Quotienten, den man mit x ausdrückt, und den gegebenen Divisor unter einander, und dann zur rechten Seite den Dividend.

2) Man hebe nun den aufgestellten Regeln gemäß die Brüche auf, verkleinere, wenn es angeht, und suche die unbekannte Größe x.

Beyspiel:

Es sey der Bruch 6½ mit 4⅔ zu dividiren (§. 41. III. Beysp.).

Auflösung:

1) Man ziehe den Verticalstrich, setze links x sammt dem Divisor 4⅔, und rechts hinüber den Bruch 6½, welcher der Dividend ist:

x	6½
4⅔	

2) Man hebe die Brüche auf, und suche dann den Quotienten:

x	13
14	3
2	

daher ist $x = \frac{13 . 3}{14 . 2} = {}^{39}/_{28} = 1\,{}^{11}/_{28}$.

§. 71.

Bedingungsglieder, Frageglieder.

Wenn ich z. B. auch weiß, daß die Menge der angekauften Waare mit der dafür zu leistenden Bezahlung im geraden Verhältnisse ist, so kann ich daraus noch nicht berechnen, was 30 Ellen dieser Waare kosten werden, wenn ich nicht vorhin weiß, was ein bestimmtes Maaß derselben, etwa 1 Elle, oder ½ Elle, oder ¼ Elle 2c. kostet.

Es muß demnach jeder Aufgabe eine Bedingung

zum Grunde liegen, durch welche das Unbekannte so bestimmt ist, daß man es mittels der gesetzten Bedingung zu finden in den Stand versetzt ist; um deswillen werden

a) jene Größen Bedingungsglieder genannt, welche zum voraus gegeben werden, um mittels derselben die unbekannte Größe zu finden.

b) Im Gegentheile nennt man aber die unbekannte Größe selbst und diejenigen Größen, denen sie unter der gesetzten Bedingung entsprechend ist, Frageglieder.

Es sey die Aufgabe gegeben: „Wenn 200 fl. Kapital in 1 Jahre 10 fl. Zins geben, welchen Zins geben 6000 fl. Kapital in 2 Jahren?“ In dieser Aufgabe sind die Größen „200 fl. Kap., 1 Jahr, 10 fl. Zins“ die Bedingungsglieder, hingegen aber „6000 fl. Kapital, 2 Jahr, x Zins“ die Frageglieder; die ersteren drücken die Bedingung aus, unter welcher für das Kapital von 6000 fl., das 2 Jahr verzinset wird, die Größe des Zinses gefunden werden soll.

In den im §. 61. angeführten beiden Beyspielen der geraden Regeldetri sind jedesmal die beiden Bedingungsglieder an der ersten und dritten Stelle, hingegen aber die beiden Frageglieder an der zweyten und vierten Stelle der Proportion.

In dem im III. Zusatze des §. 62. angeführten Beyspiele der umgekehrten Regeldetri bilden die beiden Bedingungsglieder für jenen Fall, wo die unbekannte Größe an der dritten Stelle steht, die äusseren, und die beiden Frageglieder die mittleren Glieder der Proportion; in jenem Falle aber, wo die bekannte Größe an der vierten Stelle steht, sind die Bedingungsglieder die mittleren, und die beiden Frageglieder die äusseren Glieder.

§. 72.

Ursachen, Wirkungen.

Nimmt man das Wort „Ursache (Causa)“ in einem weiter ausgedehnten Sinne, nämlich für alles

dasjenige, woraus man erkennt, daß ein Ding gerade so groß ist, oder warum es gerade diese, und keine andere bestimmte Größe habe, und das Wort „Wirkung (Effectus) für dasjenige, dessen Größe durch das erstere bestimmt wird, so können bey den Aufgaben der Regeldetri diejenigen Größen, welche die anderen bestimmen, Ursachen, und die durch sie bestimmten Größen Wirkungen genannt werden.

In dem im vorigen §. angeführten Beyspiele bestimmt das Kapital und die Zeit die Größe des Zinses, es sind somit die beiden ersten Größen die Ursachen, hingegen aber der durch sie bestimmte Zins wird die diesen Ursachen entsprechende Wirkung genannt.

Anmerkung: Weil es Größen giebt, die in dem im §. 58. bey b. angegebenen Sinne im umgekehrten Verhältnisse stehen, und das Wort „Ursache“ hier nicht für das genommen wird, was in der Metaphysik Causa physica efficiens, sondern für das, was in dieser Wissenschaft Principium cognoscendi genannt wird, so folgt, daß es in diesem Sinne Ursachen geben könne, die mit ihren Wirkungen im umgekehrten Verhältnisse stehen, indem offenbar in der Zunahme gewißer Größen der Grund liegt, warum jetzt die anderen abnehmen müssen. Mehrere Arbeiter verrichten z. B. das nämliche Geschäft in einer kürzeren Zeit; es ist also die Anzahl der Arbeiter in dem angegebenen Sinne als Ursache betrachtet mit ihrer Wirkung — mit der Zeit nämlich, binnen welcher sie die nämliche Arbeit verrichten, im umgekehrten Verhältnisse.

§. 73.

Der Vorbereitungsansatz:

Es ist bequem, und bey größeren und etwas verwickelten Aufgaben sogar nothwendig, daß man die vorkommenden einzelnen Größen in gedrängter Kürze, und in einer gewißen Ordnung vor sich hat, damit man sie mit einem Blicke übersehen, und auf eine sichere Weise die gehörigen Verrichtungen vornehmen kann.

Zu diesem Zwecke mache man sich nachstehenden Ansatz, den ich Vorbereitungsansatz nenne, weil

er eigentlich nur eine **Vorbereitung** zu den folgenden Veränderungen ist:

1) Man setze in einer verticalen Columne von oben nach unten alle Bedingungsglieder, und füge ihnen links die Anfangsbuchstaben ihrer Benennungen bey.

2) Man setze rechts ebenfalls in einer verticalen Columne so alle Frageglieder, daß jedes derselben mit seinem gleichartigen Bedingnngsgliede in eine horizontale Linie zu stehen kömmt.

3) Sind die Frageglieder mit ihren Bedingungsgliedern gleichnamig, so ist es nicht nothwendig, daß man ihre Benennungen mit den Anfangsbuchstaben bezeichnet; sind sie aber mit denselben ungleichnamig, so bemerke man dieses zur rechten Seite durch die beygesetzten ersten Buchstaben ihrer Benennung.

4) Endlich trenne man jedes Fragglied von seinem gleichartigen Bedingungsgliede durch das Zeichen des Verhältnisses, welches in zwey Puncten (:) besteht, und jedesmal zwischen das Frage- und Bedingungsglied gesetzt wird.

Beyspiel:

Wenn 200 fl. Kapital in einem Jahre zu 5 Procenten 10 fl. Zins geben; welchen Zins geben 6000 fl. in 4½ Jahre zu 4 Procenten?

Vorbereitungsansatz:

K.	200	:	6000
J.	1	:	4½
Proc.	5	:	4
Z.	10	:	x?

Die in der ersten linksstehenden verticalen Columne vorkommenden Größen sind die Bedingungsglieder, und die anderen, welche in der rechtsstehenden verticalen Columne vorkommen, sind die Frageglieder; daher sind die Größen „200 fl. Kapital, 1 J., 5 Proc., 10 fl. Zins“ die Bedingungsglieder, und die übrigen „6000 fl. Kap., 4½ J., 4 Proc., x fl. Zins“ sind die Frageglieder. Ueberdieß stehen die gleichartigen Glieder 200 fl. Kap. und 6000 fl. Kap., dann 1 Jahr und 4½ J.,

ferner 5 Procent und 4 Procent, endlich 10 fl. Zins, und x fl. Zins jedesmal von der Linken zur Rechten in einer horizontalen Linie.

II.

Die Benennung, und Auflösung der verschiedenen Aufgaben der Regeldetri.

§. 74.

A) Die einfache gerade Regeldetri.

Die einfache Regeldetri (Regula aurea simplex) wird, wie dieses schon im §. 62. I. und II. Zus. bemerkt wurde, in die gerade und verkehrte Regeldetri abgetheilet.

Zur einfachen geraden Regeldetri gehören alle jene Aufgaben, wo die Größen zusammen im geraden Verhältnisse stehen, und zu 3 gegebenen Größen die 4te unbekannte Größe gesucht wird.

Die Auflösung der Aufgaben der einfachen geraden Regeldetri geschieht mittels des Reesischen Ansatzes nach folgenden Regeln:

1) Sobald man die Aufgabe in der Form des Vorbereitungsansatzes angesetzt hat, und man durch die angestellte Vergleichung weiß, daß die Größen zusammen im geraden Verhältnisse stehen, so ziehe man den Verticalstrich, und schreibe links die unbekannte Größe x mit einer kurzen Bezeichnung der ihr zukommenden Benennung; eben so schreibe man

2) zur rechten Seite des Verticalstriches in einer horizontalen Linie das bekannte Frageglied, jene Größe nämlich, welche unter der gesetzten Bedingung die unbekannte Größe bestimmt;

3) Links unter das Frageglied x schreibe man

das Bedingungsglied, welches mit dem oben rechts stehenden bekannten Fragegliede gleichartig und gleichnamig ist; endlich

4) schreibe man rechts hinüber das noch übrige Bedingungsglied, welches mit x gleichartig und gleichnamig ist.

5) Nachdem man auf die in den §§. 66. und 67. vorgeschriebene Weise die etwa vorkommenden Brüche aufgehoben, und die möglichen Verkleinerungen vorgenommen hat, so dividire man, um x zu finden, das Product der rechtsstehenden Zahlen mit dem Producte der bekannten linksstehenden Zahlen.

I. Beyspiel:

Wenn 100 fl. Kapital 5 fl. Zins geben, welchen Zins geben dann 12000 Kapital?

Auflösung:

1) Man mache sich den Vorbereitungsansatz, und stelle nach Vorschrift des §. 58. die Vergleichung an, um zu sehen, ob die Größe des Kapitals mit der Größe des entsprechenden Zinses im geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehe:

Vorbereitungs-	K. fl.	100	:	12000
ansatz	Z. fl.	5	:	x?

2) Weil hier 3 Größen gegeben sind, um die vierte zu finden, und das Kapital mit dem Zinse im geraden Verhältnisse steht, so hat man eine Aufgabe der einfachen geraden Regeldetri; um deswillen erhält man in Gemäßheit der so eben aufgestellten Regeln in Reesischer Gestalt nachstehenden Ansatz:

Z. fl. x	12000 fl. K.	Z. fl. x	12000 fl. K.		
		K. fl. 100	5 fl. Z.		

3) Läßt man bey diesen benannten Zahlen die beygefügten Benennungen weg (§. 50. d.), und verklei-

nert man zugleich, indem man auf beiden Seiten 2 Nullen ausstreicht, so erhält man folgenden Ansatz, wo x dadurch gefunden wird, daß man das Product der rechts stehenden Zahlen mit der links stehenden Zahl 1 dividirt:

x	120
1	5

$$x = \frac{120 \times 5}{1} = 120 \times 5 = 600.$$

Es geben also unter der gesetzten Bedingung 12000 fl. Kapital 600 fl. Zins.

Probe:

Zur Probe nehme man eine jener Größen, die bey der ersten Aufgabe bekannt war, etwa 100 fl. Kapital, als unbekannt an, und suche dieselbe nach den nämlichen hier aufgestellten Regeln; findet man bey der zweyten Berechnung die vorhin bekannt gewesene Größe, so darf man annehmen, daß bey der ersten Berechnung nicht gefehlt worden ist (I. §. 40.).

Bey dieser Probe lautet demnach die Aufgabe so: „Wenn zum Zinse von 600 fl. ein Kapital von 12000 fl. erfodert wird, wie groß muß das Kapital seyn, damit es 5 fl. Zins giebt?

Vorbereitungs-	Z. fl. 600	:	5	
Ansatz	K. fl. 12000	:	x?	

Verfährt man nach den hier gegebenen Vorschriften, indem man die diesen benannten Zahlen beygefügten Benennungen wegläßt, zur Verkleinerung auf beiden Seiten 2 Nullen ausstreicht, und dann beiderseits mit 6 dividirt, so erhält man wieder die vorhin bekannt gewesene Größe, nämlich 100 fl. Kapital:

K. fl.	x	5 fl. Z.
Z. fl.	600	12000 fl. K.

x	5
1	20

$$x = 5 \times 20 = 100$$

Es wird also ein Kapital von 100 fl. erfodert, damit es unter der gesetzten Bedingung 5 fl. Zins giebt, weßhalb die angestellte erste Berechnung richtig ist.

Anmerkung: 1) Wenn man an Jemand eine Summe Geldes auf eine Zeit überläßt, so fordert man gewöhnlich eine gewiße Summe dafür, es heißt dann

a) die gelehnte Summe Geldes das Kapital,

b) die für den einjährigen Gebrauch desselben gefoderte Summe das Interesse oder der Zins, und zwar

a) einfacher Zins, welcher nur vom Kapital allein entrichtet wird, wo man also den Zins, selbst wenn mehrere Zinstermine ausstehen, nicht als Kapital betrachtet, und somit dafür die treffenden Zinse nicht entrichtet.

b) Zinseszinse, wo der erloffene Zins nicht abgetragen, sondern von seiner Zahlzeit an als Kapital betrachtet wird, und folglich verzinset werden muß.

c) Unter den Procenten (von pro und centum) versteht man hier jenen Zins, der jährlich von 100 fl. Kapital bezahlt wird.

2) Die Rechnung, wo die einfachen Zinsen bestimmt werden, nennt man die einfache Zinsrechnung, wo hingegen die Zinseszinse berechnet werden, die zusammengesetzte Zinsrechnung.

3) Die einfache Zinsrechnung gehört entweder zur einfachen, oder wie man im folgenden § sehen wird, zur zusammengesetzten Regeldetri; weßhalb nun hierüber Beyspiele angeführt werden. Dagegen ist aber die zusammengesetzte Zinsrechnung eine Anwendung der Progressionslehre, wozu die Logarithmen benützt werden; um deswillen kann dieselbe in diesem Lehrbuche nicht vorgetragen werden.

II. Beyspiel:

Wie viel Gulden kosten $6^3/_4$ Ellen einer gewißen Waare, wenn $2^1/_2$ Elle der nämlichen Waare $18^5/_6$ fl. kosten?

Auflösung:

1) Man mache den Vorbereitungsansatz, und untersuche durch Vergleichung, in welchem Verhältnisse die Größen zu einander stehen:

$$\text{Vorbereitungsansatz} \begin{cases} \text{Ell.} \; 2^1/_2 : 6^3/_4 \\ \text{fl.} \; 18^5/_6 : x? \end{cases}$$

2) Weil die Größen hier im geraden Verhältnisse stehen, so setze man die Aufgabe den aufgestellten Regeln gemäß an, hebe die Brüche auf, und verkleinere, während man dann zugleich, um x zu finfinden, das Product der rechts stehenden Zahlen durch das Product der bekannten linksstehenden Zahlen dividirt:

fl. x	$6\frac{3}{4}$ Ell.
Ell. $2\frac{1}{2}$	$18\frac{5}{6}$ fl.

x	$\frac{27}{4}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{113}{6}$

x	27
6 . 4 . 5	113 . 2

x	9
4 . 5	113

$$x = \frac{9 \cdot 113}{4 \cdot 5} = 50\frac{17}{20}.$$

Es kosten also unter dieser Bedingung $6\frac{3}{4}$ Ellen der nämlichen Waare $50\frac{17}{20}$ fl. = 50 fl. 51 kr. (I. §. 90. A.)

Probe:

Man nehme eine der vorhin bekannt gewesenen Größen, etwa $18\frac{5}{6}$ fl., als unbekannt an, und man hat nun diese Aufgabe: „Wieviel Gulden kosten $2\frac{1}{2}$ Ellen, wenn $6\frac{3}{4}$ Ellen der nämlichen Waare $50\frac{17}{20}$ fl. kosten?

Man mache sich den Vorbereitungsansatz, und führe dann die Auflösung, da die Größen im geraden Verhältnisse stehen, nach den für die Aufgaben der einfachen geraden Regeldetri aufgestellten Regeln aus, und man erhält wieder $18\frac{5}{6}$ fl., weßhalb die vorhin angestellte Berechnung richtig ist:

Vorbereitungs- ansatz				
{	Ell.	$6\frac{3}{4}$	:	$2\frac{1}{2}$
{	fl.	$50\frac{17}{20}$	:	x?

fl. x	$2\frac{1}{2}$ Ell.
Ell. $6\frac{3}{4}$	$50\frac{17}{20}$ fl.

x	$\frac{5}{2}$
$\frac{27}{4}$	$\frac{1017}{20}$

x	5
2 . 20 . 27	1017 . 4

x	
2 . 3	113

$$x = \frac{113}{6} = 18\frac{5}{6} \text{ fl.}$$

III. Beyspiel:

Wenn $8\frac{1}{2}$ Pfund einer gewißen Waare 12 fl. 48 kr. 4 Häller kosten, was kosten $10\frac{3}{4}$ Pfund der nämlichen Waare?

Auflösung:

Man könnte hier die Einheiten verschiedenen Ranges nach den im I. Theile bey den Reductionen auf-

gestellten Regeln auf Einheiten einer und der nämlichen Benennung reduciren; indessen ist es aber bequemer, wenn man diese Reduction nicht vornimmt (I. §. 110. Anmerk. 1.), und dagegen gleich unmittelbar, da man hier abermal eine Aufgabe der einfachen geraden Regeldetri hat, nach den hier aufgestellten Regeln mit Berücksichtigung der bey der Multiplication und Division mit benannten Zahlen gegebenen Vorschriften verfährt (I. Thl. II. Hauptstück II. Abschnitt IV. und V.):

Vorbereitungsansatz:	Pf. 8½	:	10¾
	12 fl. 48 kr. 4 Häller	:	x?

fl. 2c. x	10¾ Pf.
Pf. 8½	12 fl. 48 kr. 4 Häll.

x	43/4
17/2	12 fl. 48 kr. 4 Häll.

x	43 . 2
4 . 17	12 fl. 48 kr. 4 Hl.

x	43
17	6 fl. 24 kr. 2 Hl.

$$x = \frac{(6\text{ fl. }24\text{ kr. }2\text{ Hl.}) \times 43}{17}$$

Es kosten also unter dieser Bedingung 10¾ Pfund 16 fl. 11 kr. 7 7/17 Häller, indem x = ((6 fl. 24 kr. 2 Häller) × 43) : 17 = 16 fl. 11 kr. 7 7/17 Häller.

Die Probe würde hier wieder auf die vorige Weise angestellt werden.

Anmerkung: Wenn sich alle Einheiten verschiedener Ordnung mit dem nämlichen Maaße, mit dem man auf der andern Seite theilet, ohne Rest dividiren lassen, so kann man dabey ebenfalls, wie es in diesem Beyspiele mit der Zahl 2 geschehen ist, die vorgeschriebenen Verkleinerungen vornehmen.

§. 75.

B. Die einfache verkehrte Regeldetri.

Zur einfachen verkehrten Regeldetri gehören alle jene Aufgaben, wo die Größen zusammen im umgekehrten Verhältnisse stehen, und zu 3 gegebenen Größen die 4te unbekannte Größe gesucht wird.

Die Auflösung dieser Aufgaben geschieht nach folgenden Regeln:

1) Nachdem man den Vorbereitungsansatz gemacht, und durch angestellte Vergleichung gefunden hat, daß die Größen zusammen im umgekehrten Verhältnisse stehen, so mache man den Verticalstrich, und setze links oben das unbekannte Fragglied x, und unter dieses ebenfalls zur linken Seite das bekannte Fragglied.

2) Mit der nämlichen Benennung, mit der man links aufhörte, fange man oben zur Rechten an, und setze unter dieses Bedingungsglied das andere, welches mit der gesuchten Größe x gleichnamig ist.

3) Endlich, nachdem man vorhin auf die gehörige Weise die etwa vorkommenden Brüche aufgehoben, und die möglichen Verkleinerungen vorgenommen hat, dividire man, um x zu finden, das Product der rechtsstehenden Zahlen mit dem Producte der linksstehenden bekannten Zahlen.

Beyspiel:

Wenn 600 fl. einen gewißen Zins in 6 Jahren geben, wie lange müssen bey den nämlichen Procenten 800 fl. als Kapital ausgelegt werden, um den nämlichen Zins zu geben?

Auflösung:

1) Man mache den Vorbereitungsansatz, und stelle die Vergleichung an, um zu sehen, in welchem Verhältnisse die Größen zu einander stehen:

Vorbereitungs-	K. fl. 600	:	800
ansatz	J. 6	:	x?

2) Weil hier die Größen im umgekehrten Verhältnisse stehen, und 3 gegeben sind, während die vierte Größe gesucht wird, so hat man eine Aufgabe der einfachen verkehrten Regeldetri, weßhalb links am Verticalstriche die beyden Fragglieder gesetzt werden, wovon eines unbekannt, und das andere bekannt ist:

J.	x	
K. fl.	800	

3) Zur rechten Seite setze man die beiden Bedingungsglieder, indem man oben mit jenem Gliede anfängt, welches mit der unten linksstehenden Größe gleichnamig ist:

J.	x	600	fl. K.
K. fl.	800	6	J.

4) Läßt man hier die beygesetzten Benennungen weg, und verkleinert man, indem man beyderseits 2 Nullen ausstreicht, und zweymal mit 2 dividirt, sucht man ferner der bekannten Regel gemäß x, so erhält man, daß $x = 4\,{}^1\!/_2$;

x	600
800	6

x	3
2	3

$x = {}^9\!/_2 = 4\,{}^1\!/_2$

Es müssen also 800 fl. Kapital $4\,{}^1\!/_2$ Jahr an Zins gelegt werden, um bey den nämlichen Procenten den nämlichen Zins zu geben.

Probe:

Man nehme eine jener Größen, die vorhin bekannt gewesen ist, etwa 600 fl. Kapital, als unbekannt an, und man hat nun diese Aufgabe: „Wenn 800 fl. einen gewißen Zins in $4\,{}^1\!/_2$ Jahre geben, wie groß muß das Kapital seyn, damit es bey den nämlichen Procenten den nämlichen Zins in 6 Jahren giebt?

Vorbereitungsansatz	J.	$4\,{}^1\!/_2$	:	6
	K. fl.	800	:	x?

Verfährt man den gegebenen Regeln gemäß, so findet man, daß x = 600 fl.;

K. fl.	x	$4\,{}^1\!/_2$	J.
J.	6	800	fl. K.

x	${}^9\!/_2$
6	800

x	9
2 . 6	800

x	3
1	200

$x = 3 \times 200 = 600$

Es muß also unter dieser Bedingung ein Kapital von 600 fl. an Zins gelegt werden, weßhalb die vorhin angestellte Berechnung richtig ist.

I. Zusatz: Bedient man sich in dem im §. 72. angegebenen Sinne der Ausdrücke „Ursache und Wirkung", so kann man, indem man bey Producten die Stellen der Factoren verwechseln darf, und hier die Ursachen mit ihren Wirkungen im geraden Verhältnisse stehen, die Aufgaben der einfachen geraden Regeldetri auch nach dieser Regel Reesisch ansetzen:

1) Man schreibe oben zur linken Seite des Verticalstriches die unbekannte Wirkung x, und rechts hinüber in einer horizontalen Linie die damit gleichnamige bekannte Wirkung;

2) Ferner setze man links unter x die Ursache, welche die bekannte Wirkung bestimmt, und rechts hinüber die damit gleichnamige Ursache, welcher die unbekannte Wirkung entsprechend ist.

Nach dieser Vorschrift würde das im §. 74. angeführte I. Beyspiel so Reesisch angesetzt werden:

Z. fl.	x	5 fl.	Z.
K. fl.	100	12000 fl.	K.

Auf die nämliche Weise könnte man in dieser Rücksicht die Aufgaben der einfachen verkehrten Regeldetri, da hier die Ursachen mit ihren Wirkungen im umgekehrten Verhältnisse stehen, auch nach dieser Regel Reesisch ansetzen:

1) Man schreibe oben zur linken Seite des Verticalstriches die unbekannte Wirkung x, und rechts hinüber in einer horizontalen Linie die damit gleichnamige bekannte Wirkung hin;

2) Ferner setze man links unter x jene Ursache, welcher die unbekannte Wirkung entspricht, und rechts hinüber die damit gleichnamige Ursache, welcher die bekannte Wirkung entsprechend ist.

Nach dieser Regel würde das im §. 75. angeführte Beyspiel so angesetzt werden:

J.	x	6	J.
K. fl.	800	600 fl.	K.

Die weitere Berechnung bey den beiden in diesem Zusatze gemachten Ansätzen würde dann ganz den bereits aufgestellten Regeln gemäß geschehen.

II. Zusatz: Vergleicht man die beiden in dem vorausgehenden Zusatze so eben angeführten Reesischen Ansätze mit einander, so wird man finden, daß bey der einfachen geraden Regeldetri die unbekannte Wirkung x mit jener Ursache, welche die bekannte Wirkung bestimmt, auf die linke Seite, hingegen aber die bekannte Wirkung mit jener Ursache, welche die unbekannte Wirkung bestimmt, auf die rechte Seite des Verticalstriches zu stehen kömmt, während bey der einfachen verkehrten Regeldetri die unbekannte Wirkung x mit jener Ursache, durch welche sie bestimmt wird, auf die eine, und die bekannte Wirkung mit der sie bestimmenden Ursache auf die andere Seite des Verticalstriches gesetzt wird.

III. Zusatz: Stellt man aber zwischen den beiden in den §§. 74 und 75. vorkommenden Reesischen Ansätzen die Vergleichung an, so wird man bemerken, daß bey der einfachen geraden Regeldetri das unbekannte Frageglied sammt jenem Bedingungsgliede, welches mit dem bekannten Fragegliede gleichnamig ist, auf die linke Seite, hingegen aber das bekannte Frageglied mit jenem Bedingungsgliede, welches mit dem unbekannten Fragegliede gleichnamig ist, auf die rechte Seite des Verticalstriches zu stehen kömmt, während bey der einfachen verkehrten Regeldetri die beiden Frageglieder auf die eine, und die beiden Bedingungsglieder auf die andere Seite gesetzt werden.

Anmerkung: 1) Wie die Aufgaben der einfachen geraden und verkehrten Regeldetri nach dem gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze, wo die Form der Proportion beybehalten wird, aufgelöst werden, ist in den §§. 61. und 62. schon gezeigt worden.

2) Ich habe der Deutlichkeit wegen bey der Auflösung der bisher angeführten Aufgaben bey einem Beyspiele den nämlichen Ansatz mehrmal wiederholt; es ist dieses bey der schriftlichen Ausarbeitung, welche in der Schule, oder zu Hause auf der Tafel oder auf dem Papier vorgenommen wird, nicht nothwendig, indem man da bey

der Aufhebung der Brüche und bey den Verkleinerungen immerhin die vorhin da gewesenen gebrochenen oder ganzen Zahlen ausstreichen, und an ihre Stellen die neuen Größen hinschreiben, und somit die ganze Operation bey einem und dem nämlichen Ansatze vornehmen kann.

3) Wie mittels des Reesischen Ansatzes jene Aufgaben der einfachen Regeldetri aufgelöst werden, wo die gleichartigen Größen ungleichnamig sind, und also gleichnamig gemacht werden müssen (§. 62. V. Zus.), wird späterhin gezeigt werden, nachdem vorhin nach diesem Ansatze die Reductionen vorgetragen worden sind.

§. 76.

Die zusammengesetzte gerade Regeldetri.

Die zusammengesetzte gerade Regeldetri befaßt sich mit jenen Aufgaben, wo mehr als 3 Größen gegeben sind, um die unbekannte Größe x zu finden, während alle bestimmenden Größen mit den bestimmten Größen im geraden Verhältnisse stehen.

Die Auflösung dieser Aufgaben mittels des Reesischen Ansatzes geschieht nach folgenden Regeln:

1) Man setze, nachdem man vorhin den Vorbereitungsansatz gemacht, und durch die angestellte Vergleichung gefunden hat, daß sämmtliche bestimmende Größen mit der durch sie bestimmten Größe im geraden Verhältnisse stehen, und man somit eine Aufgabe der zusammengesetzten geraden Regeldetri hat, links oben das unbekannte Fragеglied x hin, und auf die rechte Seite des Verticalstriches schreibe man der Ordnung nach alle bekannten Fragеglieder.

2) Links unter x schreibe man in der nämlichen Ordnung alle Bedingungsglieder, mit Ausnahme desjenigen, welches mit dem unbekannten Frageglіede x gleichnamig ist, indem dasselbe unten auf die rechte Seite des Verticalstriches hingeschrieben werden muß.

3) Hat man die vorkommenden Brüche aufge-

hoben, und die möglichen Verkleinerungen vorgenommen, so dividire man, um x zu finden, das Product der rechtsstehenden Zahlen mit dem Producte der linksstehenden bekannten Zahlen.

Beyspiel:

Wenn 200 fl. Kapital in 1 Jahre zu 5 Procenten 10 fl. Zins geben, welchen Zins geben 12000 fl. Kapital in 6½ Jahre zu 4 Procenten?

I. Auflösung nach dem Reesischen Ansatze:

1) Man mache den Vorbereitungsansatz, und stelle die Vergleichung an, man wird finden, daß hier das Kapital, die Zeit, und die Procente als die bestimmenden Größen mit dem gesuchten Zinse, folglich mit der bestimmten Größe x im geraden Verhältnisse stehen (§. 58 a.).

Vorbereitungsansatz				
	Kap. fl.	200	:	12000
	Jahr	1	:	6½
	Procent	5	:	4
	Zins fl.	10	:	x?

2) Man setze auf die linke Seite des Verticalstriches x, und rechts hinüber der Ordnung nach alle bekannten Frageglieder, während man in der nämlichen Ordnung auf die linke Seite unter x alle Bedingungsglieder hinschreibt, dasjenige ausgenommen, das mit dem unbekannten Fragegliede gleichnamig ist, und rechts unten hingeschrieben werden muß:

Z. fl. x	12000 fl. K.	Z. Z.	x	12000 fl. K.
	6½ J.	K. fl.	200	6½ J.
	4 Procent	J.	1	4 Procent
		Pr.	5	10 fl. Z.

3) Läßt man die beygefügten Benennungen weg, hebt man den Bruch auf, verkleinert man, indem beiderseits 2 Nullen ausstreicht, und dann zweymal mit 2 und dann mit 5 dividirt; dividirt man ferner das Product der rechtsstehenden Zahlen durch das Product

der linksstehenden Größen, so findet man, daß x = 3120 fl.:

x	12000
200	$^{13}/_{2}$
1	4
5	10

x	120
	13
	2

$$x = 120 \times 13 \times 2 = 3120.$$

Es geben also unter dieser Bedingung 12000 fl. Kapital in 6½ Jahre zu 4 Procenten einen Zins von 3120 fl.

Probe:

Man nehme die Größe „10 fl. Zins“ als anbekannt an, und man hat diese Aufgabe: „Wenn 12000 fl. Kapital in 6½ Jahre zu 4 Procenten einen Zins von 3120 fl. geben, welchen Zins erhält man von 200 Kapital in 1 Jahre zu 5 Procenten?

Verfährt man nun ganz den so eben angegebenen Vorschriften gemäß, so erhält man wieder 10 fl. als den gesuchten Zins, weßhalb die vorhin angestellte Berechnung richtig ist.

Anmerkung: Es ist, was ich in Absicht auf alle Aufgaben sowohl der einfachen, als der zusammengesetzten Regeldetri bemerkt haben will, nicht nothwendig, daß man bey der Probe den Vorbereitungsansatz noch einmal anschreibt; vielmehr streiche man beym ersten Vorbereitungsansatze die als unbekannt angenommene Größe aus, und setze an ihre Stelle x; steht jetzt x auf der rechten Seite, so hat man wieder rechts die Frage- und links die Bedingungsglieder, steht aber x auf der linken Seite, so hat man beym Vorbereitungsansatze links die Frage- und rechts die Bedingungsglieder.

II. Auflösung mittels einfacher Proportionen:

1) Rücksichtlich aller Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri, sie mögen nach dem Reesischen oder nach dem gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze aufgelöst werden, ist zu bemerken, daß alle übrigen bestimmenden Größen aus dem Grunde als gleich gedacht werden

müssen, sobald was immer für eine derselben mit der durch sie bestimmten Größe verglichen wird, weil ohne dieses kein bestimmtes Verhältniß gedenkbar ist.

Ich kann z. B. nur dann mit Wahrheit sagen, daß das Kapital mit dem Zinse im geraden Verhältnisse stehe, und also das 2 „ 3 „ oder 4fache Kapital auch einen 2 „ 3 oder 4mal größeren Zins gebe, wenn die Zeit, während welcher beide Kapitale an Zins gelegt sind, gleich ist, und dieselben zugleich zu den nämlichen Procenten angelegt sind.

Eben so wird nur bey dem nämlichen Kapitale und den nämlichen Procenten der Zins mit der Zeit, und bey dem nämlichen Kapitale und der nämlichen Zeit mit den Procenten im geraden Verhältnisse stehen.

3) Weil unter der so eben angegebenen Bedingung das Kapital mit der Zeit im geraden Verhältnisse steht, und also damit gerade proportionirt ist (§. 59.), so erhält man allererst diese Proportion, wo die unbekannte Größe durch y ausgedrückt ist:
200 fl. K. : 12000 fl. K. = 10 fl. Z. : y fl. Z., daher
200 : 12000 = 10 : y, weßhalb y = 600 (§. 61.).

4) Der gefundene Zins von 600 fl. ist noch nicht der durch die Aufgabe gesuchte Zins, weil nur in der Voraussetzung, daß die Zeit und die Procente gleich sind, das Kapital von 12000 fl., im Falle 200 fl. Kapital 10 fl. Zins geben, den Zins von 600 fl. geben würde.

Es ist aber die Zeit verschieden, weßhalb die Größe des Zinses auch durch die Zeit bestimmt wird, während welcher die beiden Kapitale an Zins gelegt sind; man erhält daher diese zweyte Proportion, wo die unbekannte Größe durch z ausgedrückt ist:

1 J. : 6½ J. = 600 fl. Z. : z fl. Z., daher
1 : 6½ = 600 : z, weßhalb z = 3900 fl.;

3) Eben so wird endlich der Zins auch durch die Procente, indem diese hier verschieden sind, bestimmt, um deswillen erhält man diese 3te und letzte Proportion, wo der gesuchte Zins, welcher unter der gege-

benen Bedingung dem Kapitale, der Zeit, und den Procenten zugleich entspricht, durch x bezeichnet ist:

5 Pr. : 4 Pr. = 3900 fl. Z. : x fl. Z., daher

5 : 4 = 3900 : x, weßhalb nun x = 3120 fl.

Es geben also 12000 fl. Kapital unter der gesetzten Bedingung 3120 fl. Zins.

Anmerkung: Wie die Probe sowohl bey dieser, als auch bey der nachstehenden III. Auflösung gemacht wird, ist sowohl aus den §§. 61. und 62., als auch aus dem ersichtlich, was in diesem Abschnitte in Absicht auf die Probe schon gesagt wurde.

III. Auflösung durch eine einzige zusammengesetzte Proportion:

1) Man betrachte die bey dieser Aufgabe vorkommenden Größen wie unbenannte Zahlen, und setze als das erste Glied der Proportion das Product aller Bedingungsglieder mit Ausnahme desjenigen, welches mit dem unbekannten Fragegliede gleichnamig ist.

2) Eben so setze man als das zweyte Glied der Proportion das Product aller bekannten Frageglieder, während man an die dritte Stelle das mit x gleichnamige bekannte Bedingungsglied, und an die vierte Stelle der Proportion das unbekannte Fragegl ied x setzet, wodurch man folgende Proportion erhält, wo x nach Vorschrift des §. 55. gesucht wird:

$$(200 \times 1 \times 5) : (12000 \times 6\tfrac{1}{2} \times 4) = 10 : x.$$

Daher ist $x = \frac{12000 \times 6\frac{1}{2} \times 4 \times 10}{200 \times 1 \times 5} =$ $120 \times 13 \times 2 = 3120$; man erhält also wieder 3120 fl. als den verlangten Zins.

Anmerkung: Sind bey den Aufgaben sowohl der geraden, als auch der verkehrten zusammengesetzten Regeldetri einige gleichartige Glieder ungleichnamig, so mache man sie gleich beym Vorbereitungsansatze nach den im I. Theile aufgestellten Reductionsregeln gleichnamig, und verfahre dann den hier aufgestellten Regeln gemäß; es sey z. B. die Aufgabe gegeben: „Wenn 300 fl. Kapital in einem Jahre 15 fl. Zins geben, welchen Zins geben 12000 fl. Kapital in 4 Monaten, im Falle beide Kapitale zu den nämlichen Procenten angelegt sind, d. i., wenn

man beiderseits von 100 fl. in einem Jahre 5 fl. Zins giebt.

Hier sind die beiden gleichartigen Größen, welche die Zeit ausdrücken, nämlich „1 Jahr und 4 Monat“ ungleichnamig, man mache also das Jahr zu Monaten, oder die Monate zu Jahren, es ist 1 Jahr = 12 Mon., und 4 Mon. sind = 1/3 Jahr (I. §. 90.); daher erhält man nun die Aufgabe: „Wenn 300 fl. Kapital in einem Jahr 15 fl. Zins geben, welchen Zins geben bey den nämlichen Procenten 12000 fl. Kapital in 1/3 Jahr? oder auch diese Aufgabe: „Wenn 300 fl. Kapital in 12 Monaten 15 fl. Zins geben, welchen Zins geben 12000 fl. bey den nämlichen Procenten in 4 Monaten?

2) Würde, wozu hier der geeignete Ort nicht ist, die bey der vorkommenden III. Auflösung aufgestellte Regel aus den Eigenschaften der zusammengesetzten Proportionalsätze abgeleitet werden, so müßte man sämmtliche bey der II. Auflösung vorkommende Proportionen durch Multiplication in eine Proportion verwandeln; die bey dieser Multiplication zum Vorscheine kommende neue Proportion wird dann die zusammengesetzte Proportion genannt, während die anderen Proportionen, die man mit einander multiplicirt, einfache Proportionen heißen.

Bey einer solchen zusammengesetzten Proportion sind die Glieder des ersten Verhältnisses, wie man beym ersten Anblicke offenbar sieht, Producte, welches bey den einfachen Proportionen der Fall nicht ist.

§. 77.

D) Die zusammengesetzte verkehrte Regeldetri.

Zur zusammengesetzten verkehrten Regeldetri gehören alle jene Aufgaben, wo mehr als 3 Größen gegeben sind, um die bekannte Größe zu finden, während zugleich alle bestimmenden Größen mit dieser letzteren, und mit der damit gleichnamigen bekannten Größe im verkehrten Verhältnisse stehen.

Die Auflösung dieser Aufgaben geschieht nach folgenden Regeln:

1) Nachdem man vorhin den Vorbereitungsansatz gemacht, und durch angestellte Vergleichung gefunden hat, daß sämmtliche bestimmende Größen

mit x und mit der damit gleichnamigen bekannten Größe als den bestimmten Größen im umgekehrten Verhältnisse stehen, und man somit eine Aufgabe einer zusammengesetzten verkehrten Regeldetri hat, so ziehe man den Verticalstrich, und setze zur linken Seite desselben sowohl x, als auch alle übrigen bekannten Fragegllieder der Ordnung nach.

2) Auf die nämliche Weise setze man rechts alle Bedingungsglieder in einer solchen Ordnung, daß das mit x gleichnamige Bedingungsglied die unterste Stelle einnimmt.

3) Hat man die Brüche aufgehoben, und die möglichen Verkleinerungen vorgenommen, so dividire man, um x zu finden, das Product der rechtsstehenden Zahlen mit jenem der linksstehenden.

4) Zur Probe nehme man eine der anfangs gegebenen Größen als unbekannt an, und suche diese nach den so eben aufgestellten Regeln; findet man die nämliche vorhin bekannt gewesene Größe wieder, so ist dann die Rechnung richtig.

Beyspiel:

Eine Festung ist auf 1 ½ Jahr für 12000 Mann mit Getraid versehen, wenn man täglich einem Manne 2 Pfund Brod giebt; nun aber wird die Besatzung um 3000 Mann vermehrt, und soll vom nämlichen Getraidvorrathe 10 Monate hindurch mit Brod versehen werden, wie viele Lothe Brod dürfen jetzt jedem Manne abgegeben werden?

I. Auflösung nach dem Reesischen Ansatze:

1) Man mache den aufgestellten Regeln gemäß den Vorbereitungsansatz, und reducire die Jahre auf Monate, oder diese auf Jahre, damit diese gleichartigen Größen gleichnamig werden, es sind 10 Monat

$= \frac{5}{6}$ Jahr, eben so reducire man die Pfunde auf Lothe, es sind 2 Pfund = 64 Loth (I. §. 85. Tab. A.):

Vorbereitungsansatz	Mann	12000	:	(12000 + 3000)	
	Jahr	$1\frac{1}{2}$	:	10 Mon.	
	Pf.	2	:	x	Loth?

Mann	12000	:	15000
Jahr	$1\frac{1}{2}$	:	$\frac{5}{6}$
Loth	64	:	x?

2) Durch die angestellte Vergleichung findet man, daß alle bestimmenden Größen mit der bestimmten Größe im umgekehrten Verhältnisse stehen, weil man täglich einem Manne desto weniger Brod geben darf, je größer die Besatzung ist, und je längere Zeit sie sich in der Festung halten muß; man setze also links am Verticalstriche alle Fragelieder, indem man mit x anfängt, und die übrigen der Ordnung nach unter x hinschreibt, und setze dann zur rechten Seite des Verticalstriches in einer solchen Ordnung alle Bedingungsglieder, daß das mit x gleichnamige Bedingungsglied an die unterste Stelle zu stehen kömmt:

Loth	x	
Mann	15000	
Jahr	$\frac{5}{6}$	

Loth	x	12000 Mann
Mann	15000	$1\frac{1}{2}$ Jahr
Jahr	$\frac{5}{6}$	64 Loth

3) Läßt man die hier vorkommenden Benennungen weg, hebt man dann die Brüche auf, und verkleinert man, dividirt man endlich das Product der rechtsstehenden Zahlen durch jenes der linksstehenden bekannten Größen, so findet man, daß $x = 92\frac{4}{25}$ Loth $= 2$ Pfund $28\frac{4}{25}$ Loth, d. h., es dürfen unter der gesetzten Bedingung täglich jedem Manne 2 Pfund und $28\frac{4}{25}$ Loth gegeben werden.

Anmerkung: Wenn hier die Probe gemacht wird, so setzt man anstatt 2 Pfund $28\frac{4}{25}$ Loth wieder $92\frac{4}{25}$ Loth, damit bey dieser Größe nur eine und die nämliche Benennung vorkömmt.

II. Auflösung durch einfache Proportionen:

Bringt man hier das in Anwendung, was bey der II. Auflösung des im vorigen §. angeführten Beyspieles gesagt wurde, und berücksichtiget man zugleich die im §. 62. aufgestellten Regeln, so erhält man nachstehende Proportionen:

1) 12000 M. : 15000 M. = y L. : 64 L., daher
   $12000 : 15000 = y : 64$, weßhalb $y = {}^{256}/_{5}$;

2) $1\frac{1}{2}$ J. : $^{5}/_{6}$ J. = x L. : $^{256}/_{5}$ L., daher
   $^{3}/_{2} : {}^{5}/_{6} = x : {}^{256}/_{5}$, weßhalb $x = 92\,{}^{4}/_{25} =$
   2 Pfund $28\,{}^{4}/_{25}$ Loth.

III. Auflösung durch eine einzige zusammengesetzte Proportion:

1) Man betrachte die hier vorkommenden Größen wie unbenannte Zahlen, und setze als das erste Glied der Proportion das Product aller Bedingungsglieder mit Ausnahme desjenigen, welches mit x gleichnamig ist.

2) An die zweyte Stelle der Proportion setze man das Product aller bekannten Frageglieder, während man an die dritte Stelle die gesuchte Größe x, und an die vierte Stelle der Proportion das mit x gleichnamige Bedingungsglied schreibt, und suche dann nach der im §. 55. bey b angegebenen Regel die unbekannte Größe x.

Wollte man aber nach der im III. Zusatze des §. 62. gegebenen Vorschrift die unbekannte Größe an die vierte Stelle setzen, und das mit ihm gleichnamige Bedingungsglied an die dritte Stelle, so müßte man an die erste Stelle das Product aller bekannten Frageglieder, und an die zweyte Stelle der Proportion das Product aller Bedingungsglieder mit Ausnahme der mit x gleichnamigen Größe setzen, während dann x nach der im §. 55. bey a gegebenen Vorschrift gesucht würde.

Man erhält im ersten Falle folgende zusammengesetzte Proportion:

$(12000 \times 1\frac{1}{2}) : (15000 \times \frac{5}{6}) = x : 64$,

wo nun $x = \frac{12000 \times 1\frac{1}{2} \times 64}{15000 \times \frac{5}{6}} = 92\frac{4}{25}$ Loth.

Im Gegentheile aber im zweyten Falle erhält man diese Proportion:

$(15000 \times \frac{5}{6}) : (12000 \times 1\frac{1}{2}) = 64 : x$,

wo ebenfals $x = \frac{12000 \times 1\frac{1}{2} \times 64}{15000 \times \frac{5}{6}} = 92\frac{4}{25}$ Loth $= 2$ Pfund $28\frac{4}{25}$ Loth.

Anmerkung: Wie sowohl bey diesen als auch bey den im folgenden §. vorkommenden Auflösungen die Probe gemacht wird, ist hinlänglich aus demjenigen ersichtlich, was in Absicht auf die bey den Aufgaben der Regeldetri anzustellende Probe in den vorangehenden §§. gesagt wurde.

§. 78.

E) Die zusammengesetzte gerade und verkehrte Regeldetri zugleich.

Zur zusammengesetzten geraden und verkehrten Regeldetri zugleich gehören alle jene Aufgaben, wo mehr als 3 Größen gegeben sind, um die unbekannte zu finden, während einige bestimmende Größen mit x, und mit der damit gleichnamigen bekannten Größe im geraden, und einige davon zugleich mit denselben im umgekehrten Verhältnisse stehen.

Die Auflösung dieser Aufgaben geschieht nach folgenden Regeln:

1) Man mache den Vorbereitungsansatz, und stelle die Vergleichung an, um zu sehen, welche bestimmende Größen mit der unbekannten und mit der zu ihr gleichnamigen bekannten Größe im geraden, und welche damit im verkehrten Verhältnisse stehen, damit man dadurch erkennt, daß man wirklich eine Aufgabe der zusammengesetz-

ten geraden und verkehrten Regeldetri zugleich vor sich hat, dann bezeichne man die im geraden Verhältnisse stehenden Größen etwa mit einem Kreutze (†), und die im umgekehrten Verhältnisse stehenden mit einer kleinen horizontalen Linie (—).

2) Nun ziehe man den Verticalstrich, und setze links oben die gesuchte Größe x, und zuletzt rechts unten das damit gleichnamige Bedingungsglied hin.

3) Ferner schreibe man der Ordnung nach alle Frageglieder so an, daß jederzeit die mit x im geraden Verhältnisse stehenden rechts, und die damit im umgekehrten Verhältnisse stehenden links unter x zu stehen kommen.

4) Dann schreibe man alle Bedingungsglieder der Ordnung nach, wie sie im Vorbereitungsansatze herablaufen, so an, daß diejenigen links gesetzt werden, welche mit dem zur gesuchten Größe x gleichnamigen Bedingungsgliede im geraden Verhältnisse stehen, während die damit im umgekehrten Verhältnisse stehenden Größen rechts gesetzt werden.

5) Man hebe endlich, wie man auf diese Weise alle vorkommenden Größen angesetzt hat, die Brüche auf, verkleinere, und suche dadurch x, daß man das Product aller noch rechtsstehenden Zahlen mit dem Producte sämmtlicher bekannten linksstehenden Zahlen dividirt.

Beyspiel:

Wenn 20 Arbeiter in 15 Tagen, im Falle sie täglich 8 Stunden arbeiten, 1 Mauer verfertigen, die 40 Fuß lang, 1½ Fuß dick, und 20 Fuß hoch ist; wie viel Zeit werden 40 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten, zu 2 Mauern verwenden, wovon jede 50 Fuß lang, 2 Fuß dick, und 30 Fuß hoch ist?

Auflösung:

1) Man mache sich den Vorbereitungsansatz, und vergleiche mit der Zeit, die in Tagen ausgedrückt ist, und hier durch die Aufgabe gesucht wird, alle übrigen Größen, um zu sehen, in welchem Verhältnisse dieselben mit der durch sie bestimmten Zeit stehen:

Vorbereitungsansatz:

Arb.	20	:	40	—	Arb.	20	:	40
St.	8	:	10	—	St.	8	:	10
M.	1	:	2	†	M.	1	:	2
F. L.	40	:	50	†	L.	40	:	50
F. D.	1½	:	2	†	D.	1½	:	2
F. H.	20	:	30	†	H.	20	:	30
Tag.	15	:	x?		T.	15	:	x?

2) Man mache den Verticalstrich, und setze links x, dann 40 Arb. und 10 Stund, ferner rechts 2 Mauern, 50 Fuß Länge, 2 F. Dicke, und 30 F. Höhe, weil die erstern zwey Größen mit x im umgekehrten, und die letzten vier damit im geraden Verhältnisse stehen:

T. x.	
Arb. 40	
St. 10	2 M.
	50 F. L.
	2 F. D.
	30 F. H.

3) Aus dem nämlichen so eben angeführten Grunde setze man der Ordnung nach die Größen „20 Arb. und 8 St.“ rechts, dagegen aber „1 M., 40 F. L., 1½ F. D., und 20 F. H.“ links, und endlich die Größe „15 Tag“ rechts unten hin, hebt man ferner den Bruch auf, verkleinert man, und sucht man den gegebenen Vorschriften gemäß x, so erhält man 30, d. h., in 30 Tagen werden unter der gesetzten Bedingung 40 Arbeiter 2 solche Mauern verfertigen:

Tag. x	20 Arb.		x	20
Arb. 40	8 St.		40	8
St. 10	2 M.		10	2
M. 1	50 F. L.		1	50
F. L. 40	2 F. D.		40	2
F. D. $1\frac{1}{2}$	30 F. H.		$\frac{3}{2}$	30
F. H. 20	15 Tag.		20	15

$x = 30.$

II. Auflösung durch einfache Proportionen:

In Gemäßheit desjenigen, was in Betreff dieser Auflösung bey der zusammengesetzten geraden, und bey der zusammengesetzten verkehrten Regeldetri schon gesagt wurde, erhält man folgende Proportionen:

1) 20 Arb. : 40 Arb. = y T. : 15 T., daher
   20 : 40 = y : 15, weßhalb y = $\frac{15}{2}$ Tag.;
2) 8 St. : 10 St. = z T. : $\frac{15}{2}$ T., daher
   8 : 10 = z : $\frac{15}{2}$, weßhalb z = 6 Tag.;
3) 1 M. : 2 M. = 6 T. : p T., daher
   1 : 2 = 6 : p, weßhalb p = 12 Tag.;
4) 40 F. L. : 50 F. L. = 12 T. : m T., daher
   40 : 50 = 12 : m, weßhalb m = 15 Tag.;
5) $1\frac{1}{2}$ F. D. : 2 F. D. = 15 T. : q T., daher
   $1\frac{1}{2}$: 2 = 15 : q, weßhalb q = 20 Tag.;
6) 20 F. H. : 30 F. H. = 20 T. : x T., daher
   20 : 30 = 20 : x, weßhalb x = 30 Tag.

Es werden also in 30 Tagen rc.

III. Auflösung, mittels einer einzigen zusammengesetzten Proportion:

1) Man betrachte die hier vorkommenden Größen wie unbenannte Zahlen, und setze als das erste Glied der Proportion einen Bruch, dessen Zähler ein Product aller jener Bedingungsglieder ist, die mit dem Bedingungsgliede „15 Tag" im geraden, und dessen Nenner ein Product jener Bedingungsglieder ist, die mit diesem Bedingungsgliede, welches mit der gesuchten Größe x gleichartig und gleichnamig ist, im umgekehrten Verhältnisse stehen.

3) Eben

2) Eben so setze man als das zweyte Glied der Proportion einen Bruch, dessen Zähler ein Product aller Frageglieder ist, die mit der unbekannten Größe x im geraden, und dessen Nenner ein Product jener Frageglieder ist, die mit x im umgekehrten Verhältnisse stehen.

3) An die dritte Stelle der Proportion setze man das mit x gleichnamige bekannte Bedingungsglied, und an die vierte Stelle das unbekannte Fragglied x, und suche dann diese Größe nach Vorschrift des §. 55. a, man erhält wieder, daß x = 30 Tagen:

$$\left(\frac{1 \,.\, 40 \,.\, 1\frac{1}{2} \,.\, 20}{20 \,.\, 8}\right) : \left(\frac{2 \,.\, 50 \,.\, 2 \,.\, 30}{40 \,.\, 10}\right) = 15 : x,$$

daher ist $x = \left(\frac{2 \,.\, 50 \,.\, 2 \,.\, 30 \,.\, 15}{40 \,.\, 10}\right) : \left(\frac{1 \,.\, 40 \,.\, 1\frac{1}{2} \,.\, 20}{20 \,.\, 8}\right)$

$= \frac{2 \,.\, 50 \,.\, 2 \,.\, 30 \,.\, 15 \,.\, 20 \,.\, 8}{1 \,.\, 40 \,.\, 1\frac{1}{2} \,.\, 20 \,.\, 40 \,.\, 10} = \frac{3 \,.\, 15}{1\frac{1}{2}} = 45 : 1\frac{1}{2} = \frac{45}{1} : \frac{3}{2} = \frac{90}{3} = 30$, d. h., in 30 Tagen ꝛc.

Anmerkung: Bey dieser Aufgabe wurden die nämlichen Arbeiter als gleichförmig wirkende Ursachen (Causæ uniformiter agentes), d. i., als solche Ursachen betrachtet, die in der nämlichen Zeit immer auch das nämliche Geschäft verrichten.

I. Zusatz: Bedient man sich der Ausdrücke „Ursache und Wirkung," so können, da bey einem Producte die Factoren beliebig verwechselt werden dürfen, die Aufgaben der zusammengesetzten geraden und verkehrten Regeldetri zugleich auch nach dieser Regel Reesisch angesetzt werden:

1) Man mache, nachdem man weiß, in welchem Verhältnisse die bestimmenden Größen zu den bestimmten stehen, den Verticalstrich, schreibe links x, und rechts hinüber die damit gleichnamige bekannte Wirkung;

2) Links unter x schreibe man alle jene Ursachen, die die bekannte Wirkung bestimmen, und damit im geraden Verhältnisse stehen, wie auch jene Ursachen,

welche die unbekannte Wirkung x bestimmen, und damit im umgekehrten Verhältnisse stehen, während rechts hinüber allemal diejenige Ursache geschrieben wird, die mit der links stehenden Ursache gleichartig und gleichnamig ist.

Nach dieser Regel würde das in diesem §. angeführte Beyspiel so angeschrieben werden:

T.	x	15	x	15
Arb.	40	20	40	20
St.	10	8	10	8
M.	1	2	1	2
F. L.	40	50	40	50
F. D.	$1\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	2
F. H.	20	30	20	30

$$x = 30.$$

Daraus sieht man jetzt von selbst ein, wie die Sache anzugehen wäre, wenn man auch nach dieser Regel die Aufgaben der zusammengesetzten geraden, und jene der zusammengesetzten verkehrten Regeldetri Reesisch ansetzen wollte.

II. Zusatz: Die zusammengesetzte Regeldetri (Regula aurea composita) wird auch die Regel von fünf, sieben, neun rc. Sätzen (Regula de quinque, septem, novem etc. positionibus), oder kürzer, die Regel Quinque, Septem, Novem rc. genannt, je nachdem dabey fünf, sieben, neun rc. Größen gegeben sind, um die unbekannte Größe x zu finden; das im §. 77. angeführte Beyspiel gehört demnach zur Regel Quinque, jenes des §. 76. zur Regel Septem, und das in diesem §. vorkommende Beyspiel zur Regel Tredecim.

III. Zusatz: Subtrahirt man von der Anzahl der gegebenen Größen 1, und dividirt man den Rest mit 2, so drückt der Quotient aus, in wie viele einfache Proportionen sich die zusammengesetzte Proportion auflösen läßt; es konnte demnach z. B. die in diesem §. ange-angeführte Aufgabe, welche zur Regel Tredecim gehört (II. Zus.) mittels 6 einfacher Proportionen auf-

gelöst werden; um deswillen wird die zusammengesetzte Regeldetri auch die Regel Duplex, Triplex, Quadruplex rc. genannt, je nachdem die Aufgaben durch zwey, drey, vier rc. einfache Proportionen auf gelöst werden können.

Anmerkung: Bey einer jeden Aufgabe der Regeldetri ist das unbekannte Frageglied x mit dem zu ihm gleichnamigen Bedingungsgliede allemal die Wirkung, welche durch alle übrigen vorkommenden Größen bestimmt wird; um deswillen müssen jederzeit diese Größen mit x und mit dem zu ihm gleichnamigen Bedingungsgliede verglichen werden, um zu sehen, in welchem Verhältnisse die bestimmenden Größen mit den bestimmten Größen stehen.

III.

Die Auflösung jener Aufgaben, wo Reductionen niederer Einheiten auf höhere, und umgekehrt höherer Einheiten auf niedere vorkommen.

§. 79.

I. Aufgabe, höhere Einheiten auf Einheiten niederer Ordnung zu reduciren.

Auflösung:

1) Man ziehe den Verticalstrich, und setze links oben die unbekannte Größe x mit dem Anfangsbuchstaben der ihr zukommenden Benennung, und rechts hinüber die gegebene Summe höherer Einheiten, welche auf die verlangten niederen Einheiten zu reduciren sind.

2) Links unter x setzte man, eine oder auch mehrere jener Einheiten, welche rechts oben stehen, und rechts hinüber die entsprechende und gleiche Summe niederer Einheiten.

3) Links setze man wieder eine der vorigen Einheiten, oder auch mehrere solche Einheiten, die

mit den vorigen gleichnamig sind, und rechts hinüber die Summe niederer Einheiten, welche mit diesen gleich und entsprechend sind.

4) Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man rechts unten Einheiten hat, die mit den gesuchten Einheiten x von gleicher Ordnung und gleicher Benennung sind, und man somit auf die verlangte Weise die höheren Einheiten auf die niederen dadurch reducirte, daß man endlich die Größe x auf die bekannte Weise sucht.

Beyspiele:

I. Wie viel Häller geben 40 kr.?

II. Wie viele Pfunde geben $^3/_8$ Centner?

III. Wie viele Secunden ist eine Person auf der Welt, welche 30 Jahre alt ist?

Auflösung nach dem Resischen Ansatze.

Häll. x	40 kr.
kr. 1	8 Häll.

also ist $x = 40 \times 8 = 320$ Hl.

Pf. x	$^3/_8$ Centn.
C. 1	100 Pf.

also ist $x = 37\frac{1}{2}$ Pfund.

Sec. x	30 J.
J. 1	$365\frac{1}{4}$ T.
T. 1	24 St.
St. 1	60 M.
M. 1	60 Sec.

also ist $x = 946'728,000$ S.

§. 80.

II. Aufgabe, niedere Einheiten auf Einheiten höherer Ordnung zu reduciren.

Auflösung:

1) Man ziehe den Verticalstrich, setze links die Größe x mit dem Anfangs-Buchstaben der ihr zukommenden Benennung, und rechts hinüber jene Summe von Einheiten, welche auf höhere reducirt werden sollen.

2) Links unter x setze man so viele der rechts oben stehenden Einheiten, daß sie eine, oder auch

mehrere Einheiten der nächst höheren Ordnung geben, welche letztere rechts hinüber gesetzt werden.

3) Links unter x setze man wieder Einheiten, die mit den vorhin zur rechten Seite hingeschriebenen gleichnamig sind.

4) Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man rechts unten solche Einheiten hät, die mit den gesuchten Einheiten gleichnamig sind, und suche dann nach Vorschrift des §. 68. die unbekannte Größe x.

Beyspiele:

I. Wie viel Kreutzer geben 320 Häller?
II. Wie viel Centner geben 37 ½ Pfund?
III. Wie viele Jahre geben 946'728.000 Secunden.

Auflösung nach dem Reesischen Ansatze:

Kr. x	320 Häll.
Häll. 8	1 Kr.

also ist $x = {}^{320}/_{8} = 40$ kr.

Cent. x	37 ½ Pf.
Pf. 100	1 Cent.

also ist $x = {}^{3}/_{8}$ Centner.

J. x	946'728.000 Sec.
Sec. 60	1 Min.
Min. 60	1 St.
St. 24	1 Tag
T. 365 ¼	1 J.

also ist $x = 30$ Jahr.

Anmerkung: In Gemäßheit der von mir im I. Theile in Betreff der baierischen Maaße und Gewichte angeführten Tabellen könnte das im §. 79. angeführte Beyspiel der zusammengesetzten Reduction, worüber in diesem §. die Probe gemacht wurde, kürzer auf diese Weise aufgelöst werden: „Wie viele Secunden geben 30 Jahr, wenn 1 Jahr 31'557.600 Secunden hat?“ Ferner: „Wie viele Jahre geben 946'728.000 Secunden, wenn 31'557.600 Secunden 1 Jahr geben?“

I. Zusatz: Die Beyspiele der einfachen Reduction gehören zur einfachen geraden Regeldetri, indem eine zwey- oder dreymal größere Summe von höheren Einheiten immer auch eine zwey- oder dreymal größere Summe von niederen Einheiten giebt; um deswillen ist die Auflösung dieser Aufgaben nach

dem gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze im §. 61. schon gezeigt worden.

II. Zusatz: Das in diesem, und in dem vorigen §. angeführte Beyspiel der zusammengesetzten Reduction würde in der Gestalt der Proportion, somit nach dem gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze so aufgelöst werden:

a. 1) 1. J. : 30 J. = 365¼ T. : y T., daher
1 : 30 = 365¼ : y, weßhalb y = 10957½ Tag;
2) 1 T. : 10957½ T. = 24 St. : : z St., daher
1 : 10957½ = 24 : z, weßhalb z = 262980 St.;
3) 1 St. : 262980 St. = 60 M. : u M., daher
1 : 262980 = 60 : u, weßhalb u = 15778800 M.
4) 1. M. : 15778800 M. = 60 S. : x S., daher
1 : 15778800 = 60 : x, weßhalb x = 946'728.000 Sec.

Es geben also 30 Jahr 946'728.000 Secunden.

b. Eben so würde man verfahren, wenn man auf diese Weise die hier gefundenen Secunden wieder auf Jahre reduciren wollte, wo die Proportionen in dieser Ordnung angesetzt würden:

1) 60 Sec. : 946728000 S. = 1 M. : y M., daher rc.

Anmerkung: 1) Weil die Reductionen schon im II. Hauptstück des I. Theiles vorgetragen wurden, so bringe man hier das wieder in Erinnerung, was dort hierüber schon gesagt wurde.

2) Der Vorbereitungsansatz ist bey diesen Beyspielen entbehrlich, weil hier z. B. die ganze Aufgabe darin besteht; „wie viel Häller geben 80 fl.?"

§. 81.

III. Aufgabe, den Werth für eine gegebene Summe höherer Einheiten zu suchen, wenn die Bedingungsglieder Einheiten niederer Ordnung sind.

Auflösung:

1) Man setze links den gesuchten Werth, den man mit x ausdrückt, und rechts hinüber das bekannte Frageglied, wofür dieser Werth gesucht wird.

2) Nun reducire man nach §. 79. die hier

vorkommenden höheren Einheiten auf jene Einheiten, welche unter den Bedingungsgliedern vorkommen.

3) Man benütze jetzt die gegebene Bedingung, indem man nach der einfachen geraden Regeldetri ansetzet, „wenn eine oder mehrere dieser Einheiten so viel kosten, oder diesen Werth haben.“

4) Nach Vorschrift des §. 80. reducire man die hier vorkommenden niederen Einheiten auf Einheiten jener Ordnung, die durch die Aufgabe verlangt werden.

5) Endlich suche man nach §. 68. die unbekannte Größe x.

Beyspiel:

Wie viel Gulden kosten 14 Centner einer gewißen Waare, wenn 1 Quintl der nämlichen Waare 1½ Häller kostet?

I. Auflösung nach dem Reesischen Ansatze:

Vorbereitungs-Ansatz { Quintl. 1 : 14 Centner.
Häll. 1½ : x fl.?

fl. x	14 Cent.	x	14
C. 1	100 Pf.	1	100
Pf. 1	32 L.	1	32
L. 1	4 Q.	1	4
Q. 1	1½ H.	1	3/2
H. 8	1 kr.	8	1
kr. 60	1 fl.	60	1

x = 560.

Es kosten also 14 Centner unter dieser Bedingung 560 fl.

II. Auflösung nach dem gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze, d. i., in der Gestalt der Proportion.

1) 1 C. : 14 C. = 100 Pf. : y Pf., daher
1 : 14 = 100 : y, weßhalb y = 1400 Pf.;

2) 1 Pf. : 1400 Pf. = 32 L. : z L., daher
1 : 14003 = 2 : z, weßhalb z = 44800 L.;

3) 1 L. : 44800 L. = 4 Q. : u Q., daher
1 : 44800 = 4 : u, weßhalb u = 179200 Q.;
4) 1 Q. : 179200 Q. = 1½ H. : q H., daher
1 : 179200 = 1½ : p, weßhalb p = 268800 Häll.;
5) 8 H. : 268800 H. = 1 kr. : q kr., daher
8 : 268800 = 1 : q, weßhalb q = 33600 kr.;
6) 60 kr. : 33600 kr. = 1 fl. : x fl., daher
60 : 33600 = 1 : x, weßhalb x = 560 fl.

Es kosten also 14 Centner unter dieser Bedingung 560 fl.

§. 82.

IV. Aufgabe, den Werth für eine gegebene Summe niederer Einheiten zu suchen, wenn die Bedingungsglieder Einheiten höherer Ordnung sind.

Auflösung:

1) Man ziehe den Verticalstrich, und setze oben links die unbekannte Größe x hin, und rechts hinüber das bekannte Frageglied, wofür der Werth gesucht wird.

2) Nun reducire man nach Vorschrift des §. 80 die hier vorkommenden niederen Einheiten auf Einheiten, die mit den unter den gegebenen Bedingungsgliedern vorkommenden Einheiten gleichnamig sind.

3) Man benütze jetzt die gegebene Bedingung, indem man nach der einfachen geraden Regeldetri ansetzet, „wenn eine oder mehrere dieser Einheiten so viel kosten, oder diesen Werth haben."

4) Nach Vorschrift des §. 79. reducire man die hier vorkommenden höheren Einheiten auf Einheiten jener Benennung, welche durch die Aufgabe gesucht werden.

5) Endlich suche man nach §. 68. die unbekannte Größe x.

Beyspiel:

Wie viel Häller kostet 1 Quintl einer gewißen Waare, wenn 14 Centner der nämlichen Waare 560 fl. kosten (§. 81.)?

I. Auflösung nach dem Reesischen Ansatze:

Vorbereitungsansatz { Centner 14 : 1 Quintl
fl. 560 : x Häll.?

Häller x	1 Quintl.		x	1
Q. 4	1 Loth		4	1
L. 32	1 Pfund		32	1
Pf. 100	1 Centner		100	1
C. 14	560 fl.		14	560
fl. 1	60 kr.		1	60
kr. 1	8 Häll.		1	8

$x = 3/2 = 1\frac{1}{2}$.

Es kostet also 1 Quintl unter dieser Bedingung 1½ Häller, wodurch man nun zugleich die Probe für das im §. 81. angeführte Beyspiel hat.

Anmerkung: Der vorstehende Ansatz wird auf folgende Weise gelesen: „Wie viel Häller kostet ein Quintl, wenn 4 Quintl 1 Loth, 32 Loth 1 Pfund, 100 Pfund 1 Centner geben, und 14 Centner 560 fl. kosten, und wenn ferner 1 Gulden 60 Kr., und 1 Kreuzer 8 Häll. hat?“

II. Auflösung nach dem gewönlichen Regeldetri-Ansatze, d. h., in Gestalt der Proportion:

In Gemäßheit desjenigen, was in Betreff dieser Auflösungs-Methode schon mehrmal gesagt wurde, erhält man folgende Proportionen:

1) 4 Qtl. : 1 Qtl. = 1 Loth : y Loth, daher rc.

Zusatz: Die in diesem und in dem vorigen §. angeführte Aufgabe könnte auch dadurch aufgelöst werden, daß man allererst nach den im I. Theile aufgestellten Reductions-Regeln die gehörige Reduction vornimmt, nach der einfachen Regeldetri der gesetzten Bedingung gemäß den entsprechenden Werth sucht, und dann wieder nach dem Bedürfnisse der Aufgabe entweder

nach den im I. Theile aufgestellten Reductions-Regeln, oder nach den hierüber in diesem Theile in den §§. 79. und 80. angegebenen Vorschriften reducirt.

In diesem Beyspiele würde man demnach die Quintl auf Centner, oder, weil man dadurch Brüche erhielte, dagegen die Centner auf Quintl reduciren. Nach der im I. Theile §. 85. Seite 135. in Betreff des bayerischen Handelsgewichtes angeführten Tabelle A. hat 1 Centner 12800 Quintl, daher sind 14 Cent. = 12800 × 14 = 179200 Quintl.; ferner nach der im I. Theile im §. 88. Seite 147. angeführten Tabelle C. hat 1 Gulden 480 Häller, daher sind 560 fl. = 480 × 560 = 268800 Häll.

Nach diesen vorgenommenen Reductionen lautet nun diese Aufgabe so: „Wie viel Häller kostet 1 Quintl, wenn 179200 Quintl 268800 Häll. kosten?

Die Auflösung der vorstehenden Aufgaben geschieht dann Reesisch, oder in der Gestalt der Proportion auf folgende Weise:

Häll. x	1 Quintl.	x	
Q. 179200	268800 Häll.	2	3

daher ist $x = \frac{3}{2}$ Häll. $= 1\frac{1}{2}$ Häll.

oder:

179200 Quintl : 1 Quintl = 268800 Häll. : x Häll., daher 179200 : 1 = 268800 : x, weßhalb

$$x = \frac{268800}{179200} = \frac{2688}{1792} = \frac{2688:896}{1792:896} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}\ \text{H. etc.}$$

Anmerkung: 1) Wenn von Maaßen, und Gewichten die Rede ist, und nicht ausdrücklich das Gegentheil bezeichnet wird, so versteht man bey solchen Aufgaben allemal die im Königreiche Bayern üblichen Maaße, und Gewichte.

2) Die Regel, nach welcher immerhin zur Linken mit der nämlichen Benennung angefangen wird, mit der man zur rechten Seite des Verticalstriches aufhörte, wird **Kettenregel**, und die dabey vorkommenden Berechnungen werden **Kettenrechnungen** genannt.

Weil der Ansatz jener Aufgaben, welche nach der Ketten-Regel aufgelöst werden, ebenfalls nach der Reesischen Form, wie ich dieses in der am Ende dieses Theiles angeführten Rechtfertigung ausführlich zeige, bewerk-

stelliget wird, so wird derselbe von einigen, namentlich von dem königl. württembergischen Herrn Ober-Regierungs-Rathe C. L. Schübler, der Reesische Ketten-Satz genannt.

3) Ich habe, weil dadurch die Regeln in Absicht auf die Aufgaben der Regeldetri auf die faßlichste Weise dargestellt werden können, bey der Auflösung dieser Aufgaben nach dem Reesischen Ansatze die Regeln immerhin so gegeben, daß links oben und rechts unten allemal Einheiten der nämlichen Benennung zu stehen kommen, während links jederzeit mit der nämlichen Benennung angefangen wird, mit der man rechts aufhörte. Ich werde deßhalb bey den im folgenden Abschnitte nach Reesischer Art vorkommenden Auflösungen diese nämliche Ansatz-Methode beybehalten.

§. 83.

Wiederholung in Fragen.

1) Welcher Ansatz wird Reesischer Ansatz genannt; wodurch unterscheidet sich dieser von demjenigen Ansatze, den ich den gewöhnlichen Regeldetri-Ansatz nenne, und bey welchem die Gestalt der Proportion beybehalten wird?

2) Warum können beym Reesischen Ansatze die Verkleinerungen auf eine ähnliche Weise, wie bey den Brüchen, vorgenommen werden?

3) Welchen Vortheil verschafft man sich dadurch, daß man beym Reesischen Ansatze sowohl verkleinert, als auch die vorkommenden Brüche aufhebt?

4) Nach welcher Regel wird jederzeit die beym Reesischen Ansatze links stehende unbekannte Größe, die man mehrentheils mit x ausdrückt, gefunden?

5) Wie können die gemeinen Brüche Reesisch mit einander multiplicirt, und dividirt werden?

6) Welche Größen nennt man Bedingungs- und Fragglieder, und welche werden Ursachen und Wirkungen genannt?

7) Was versteht man unter dem Vorbereitungsansatze, und welche Vortheile gewährt derselbe?

8) Welche Benennung und Eintheilung findet hinsichtlich der verschiedenen Aufgaben der Regeldetri Statt?

9) Was muß man bey solchen Aufgaben allemal

zum voraus wissen, um dabey eine bestimmte Regel anwenden zu können?

10) Was versteht man unter der Regel Quinque, Septem, Novem, Undecim, und Tredecim; in welcher Hinsicht kann ferner die Regeldetri die Regel Duplex, Triplex, Quadruplex ꝛc. genannt werden, und was versteht man unter der Kettenregel oder Kettenrechnung?

11) Auf was hat man bey den Reductionsaufgaben, im Falle sie Reesisch aufgelöst werden, vorzüglich zu sehen, und aus welchem Grunde gehören diese Aufgaben zur geraden Regeldetri?

12) Was nennt man Kapital, und Zins oder Interesse, und was versteht man unter dem einfachen und zusammengesetzten Zinse; ferner was will dieses sagen „ein gewißes Kapital wird zu 4 oder 5 Procenten verzinset?“

§. 84.

Beyspiele zur Uebung.

I.

Ein Mädchen wird mit Tauben auf den Markt geschickt, wo sie, um dafür 9 fl. 9 Batzen zu bekommen, das Stück um 32 kr. geben müßte; es fliegt ihr aber unter Wegs ein Paar davon, weßhalb sie, um wieder den nämlichen Erlöß von 9 fl. 9 Batzen zu erhalten, jede Taube um 4 kr. theurer giebt; es ist nun die Frage, wie viele Tauben hat dieselbe anfangs gehabt, und wie viele hat sie auf dem Markte verkauft, wenn vorausgesetzt wird, daß sie jede um den nämlichen Preis hingegeben hat?

Anmerkung: Diese Aufgabe, wie sie hier gegeben ist, ist eine bloße Aufgabe der einfachen geraden Regeldetri; dieselbe erschien aber den 17. July 1813 im 170. Stücke des Morgenblattes, wo in der Bedingung der Werth für eine jener Tauben, die das Mädchen anfangs hatte, nicht gegeben wurde, und also die Auflösung algebraisch nach den Gesetzen der unreinen quadratischen Gleichungen geschehen mußte.

Einige derjenigen Schüler, die bey mir während dieses Jahres in den Gymnasialklassen die Mathematik hören, lösten auch wirklich durch sich allein diese Aufgabe

algebraisch auf; indem sie die Anzahl der anfangs da gewesenen Tauben mit x, und den Werth für eine derselben mit y, und dann die Anzahl der noch auf den Markt gebrachten mit x — 2, und den Werth für eine von diesen mit y † 4 ausdrückten, und sich diese zwey Gleichungen bildeten,“ $xy = a$, und $(x - 2)(y + 4) = a$,“ wo sie dann zum Resultate fanden, daß $x = 18$, und $y = 32$, und daher $x - 2 = 16$, und $y + 4 = 36$. Zugleich wählten dieselben auch den kürzeren Weg, und machten sich die einzige Gleichung „$\frac{a}{x} + 4 = \frac{a}{x - 2}$“ wo sie ebenfalls fanden, daß $x = 18$, ferner $x - 2 = 16$, und also $\frac{a}{x} = \frac{576 \text{ kr.}}{18} = 32$ kr., und $\frac{a}{x - 2} = \frac{576 \text{ kr.}}{16} = 36$ kr. Diese letzte Auflösung stimmt ganz mit derjenigen überein, welche darauf den 24. July im Morgenblatte Nro. 176. eingerückt wurde.

II.

Wenn ein Dienstboth jährlich 36 fl. Lohn hat, wie viel Kreutzer treffen davon auf einen Tag?

III.

Wenn 1000 fl. Kapital einen gewißen Zins in 4 Jahren geben, wie viele Jahre müssen bey den nämlichen Prozenten 600 fl. an Zins gelegt werden, damit sie den nämlichen Zins geben?

IV.

Was kosten 48½ Klafter Holz, wenn 3 Klafter 18 fl. kosten?

V.

Wenn 20 Arbeiter eine gewiße Arbeit in 8 Tagen verrichten, wie viele Tage werden zum nämliche Geschäfte 14 Arbeiter verwenden.

VI.

Eine Magd hat zum Jahrlohne 20 fl., und ein gewißes Kleidungsstück, nach 16 Wochen geht sie aus dem Dienste, und erhält als Gebühr das Kleidungsstück; es ist nun die Frage, welchen Werth dasselbe gehabt habe, und welchen Lohn sie für das ganze Jahr erhalten hätte?

VII.

Wenn zwölf Maurer, welche des Tages 12 Stunden arbeiten, und täglich 1260 Ziegelsteine setzen, eine Gartenmauer, welche 1 Fuß dick, 120 Fuß lang, und 6 Fuß hoch ist, in 8 Tagen aufführen können, wie viele Tage werden zu einer anderen Mauer, welche 1½ Fuß dick, 360 Fuß lang, und 6½ Fuß hoch ist, 48 Maurer brauchen, welche täglich nur 8 Stunden arbeiten, und während des Tages 980 Ziegelsteine setzen?

VIII.

Welchen Zins giebt ein Kapital von 4780 fl., wenn es zu 5 Procenten, und welchen Zins würde es geben, wenn es zu 4½ Proc. verzinset würde?

IX.

Für die Garnison einer Festung von 2000 Mann reicht der Proviantvorrath von 24000 Fässern Mehles, jedes Faß zu 4 Centner auf 8 Monate hin, wenn ein Mann des Tages 40 Loth Mundportion erhält; wie viele Monate kann die Garnison einer anderen Festung, worin 10000 Mann liegen, bey täglicher Mundportion von 1 Pfund mit 60000 Fässern Mehles, jedes zu 7 Centn. 50 Pfund, ernährt werden?

X.

Ein Baumeister errichtet ein gewißes Gebäude mit seinen Leuten in 8 Monaten, wenn er dieselben wochentlich 6 Tag, und täglich 12 Stunden daran arbeiten läßt; binnen wie viel Monaten wird derselbe mit den nämlichen Untergebenen das nämliche Gebäude herstellen, wenn er sie wochentlich 5 Tag, und täglich 10 Stunden daran arbeiten läßt.

XI.

Wie viel Gulden kosten 12 Centner 48 Pfund Caffee, wenn 1 Loth Caffee 2 kr. kostet?

XII.

Nach dem Lehrbuche der Geschichte des Herrn Professors Cammerer begreift die Geschichte der Vor-

welt 3429 Jahr, des Alterthumes 955, des Mittelalters 1117, der neuen Zeit 272 Jahre, und die Geschichte der neuesten Zeit 24 Jahre in sich; wie viele Secunden betragen demnach diese 5 Zeiträume, d. i., wie viele Secunden sind seit Erschaffung der Welt bis auf das Jahr 1813 verflossen?

III. Abschnitt.

Anwendung der in den beyden vorausgehenden Abschnitten in Absicht auf die Aufgaben der Regeldetri aufgestellten Regeln auf einige practische Fälle.

§. 85.

Einleitung.

Es giebt Fälle, wo die Regeldetri zur Auflösung gewißer Aufgaben allein nicht zureichend ist.

Stehen die Größen ihrer Natur gemäß zu einander in einem geraden oder umgekehrten Verhältnisse, mithin in einer solchen wechselseitigen Verbindung, daß die Theile einer Größe mit den correspondirenden Theilen der anderen gerade oder umgekehrt proportionirt sind, dann geschieht die Auflösung nach den bisher in Betreff der Regeldetri aufgestellten Regeln.

Muß man aber die Gleichheit der Verhältnisse anderswoher erkennen, so reicht das bisher Gesagte nicht zu, um die vorkommenden Aufgaben zu lösen, weil man in diesem Falle schon zum Voraus wissen muß, ob diese oder jene Proportion Statt finde.

Der Regeldetri, und somit auch dem Reesischen Ansatze öffnet sich nun ein neues, unübersehbares Feld. Die Gleichheit der jedesmaligen beyden Verhältnisse, die eine Proportion bilden, kann auf die mannigfaltigste Weise theils aus der Natur der Dinge selbst, theils aus angenommenen positiven Bestimmungen, theils

aus anderwärtig erwiesenen Lehrsätzen erkannt werden; sobald aber diese Gleichheit der Verhältnisse da ist, so bilden die Dinge, die man als Größen betrachtet, und mit einander vergleicht, eine geometrische Proportion.

Ich will in diesem Abschnitte die Anwendung der aufgestellten Regeln nur in Betreff einiger Fälle machen; woraus man dann zu ermessen im Stande seyn wird, wie man sich bey ähnlichen, zur Regeldetri gehörigen Fällen zu benehmen habe.

I.

Die Gesellschafts-Regel.

§. 86.

Erklärungen.

a) Die **Gesellschafts-Regel** (Regula Societatis) hat ihre Benennung vom Worte „Gesellschaft;" darunter versteht man diejenige Regel, durch welche der gemeinschaftliche Gewinnst oder Verlurst entweder nur der Einlage, oder auch der Zeit und zugleich der Einlage gemäß vertheilet wird, die mehrere Personen zusammengetragen haben, um durch diese vereinte Summe einen gemeinschaftlichen Gewinnst zu erreichen.

b) Geschieht die Vertheilung nur der Einlage gemäß, so hat man eine Aufgabe der **einfachen Gesellschafts-Regel**; geschieht aber dieselbe zugleich im Verhältnisse zur Einlage, und zur Zeit, binnen welcher die einzelnen Mitglieder der Gesellschaft zur Erreichung des gemeinschaftlichen Zweckes ihre Beträge gemacht haben, so gehört die Aufgabe zur **zusammengesetzten Gesellschafts-Regel**.

§. 87.

A) Regel der einfachen Gesellschafts-Rechnung.

1) Man addire die Einlagen aller Mitglieder der Gesellschaft, um dadurch die Total- oder gesammte Einlage zu erhalten.

2)

2) Die Einlage ist mit dem correspondirenden Gewinnste im geraden Verhältnisse, weil auf eine zwey-, dreymal ꝛc. größere Einlage auch ein zwey-, dreymal ꝛc. größerer Gewinnst trifft; daher wiederhole man die einfache gerade Regeldetri so oft, bis man alle verlangten Antheile gefunden hat.

3) Zur Probe zähle man alle diese Proportionaltheile zusammen, es muß, im Falle die Rechnung richtig ist, als Summe der ganze Gewinnst oder Verlurst zum Vorscheine kommen.

Beyspiel:

Vier Kaufleute gewinnen in der Handlung 6000 fl.; der erste hat dazu 8000 fl., der zweyte 12000 fl., der dritte 16000 fl., und der vierte 9000 fl. als Einlage hergegeben; wieviel trifft nun jedem seiner Einlage gemäß?

I. Auflösung nach dem Reesischen Ansatze:

1) Man addire diese vier Einlagen, ihre Summe giebt die gesammte Einlage von 45000 fl., weil 8000 fl. + 12000 fl. + 16000 fl. + 9000 fl. = 45000 fl.;

2) Man setze, während man den Gewinnst des ersten mit x, des zweyten mit y, des dritten mit z, und den des vierten Kaufmannes mit u bezeichnet, nun Reesisch an:

a) Welcher Gewinnst trifft auf die Einlage des ersten von 8000 fl., wenn auf die gesammte Einlage von 45000 fl. der ganze Gewinnst von 6000 fl. trifft?

b) Welcher Gewinnst trifft ꝛc.

a) G. fl.	x	8000 fl. E.	b) G. fl.	y	12000 fl. E.
E. fl.	45000	6000 fl. G.	E. fl.	45000	6000 fl. G.
	x = 1066 ⅔ fl.			y = 1600	
c) G. fl.	z	16000 fl. E.	d) G. fl.	u	9000 fl. E.
E. fl.	45000	6000 fl. G.	E. fl.	45000	6000 fl. G.
	z = 2133 ⅓ fl.			u = 1200 fl.	

II. Auflösung in der Gestalt der Proportion, oder nach dem gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze:

Weil hier der Gewinnst mit der Einlage im geraden Verhältnisse ist, so erhält man nach Vorschrift des §. 61. nachstehende Proportionen:

a) 45000 fl. E. : 8000 fl. E. = 6000 fl. G. : x'fl. G., daher 45000 : 8000 = 6000 : x, weßhalb x = 1066 ⅔ fl.;

b) 45000 fl. E. : 12000 fl. E. = 6000 fl. G. : y fl. G., daher 45000 : 12000 = 6000 : y, weßhalb y = 1600 fl.;

c) 45000 fl. E. : 16000 fl. E. = 6000 fl. G. : z fl. G., daher 45000 : 16000 = 6000 : z, weßhalb z = 2133 ⅓ fl.;

d) 45000 fl. E. : 9000 fl. E. = 6000 fl. G. : u fl. G., daher 45000 : 9000 = 6000 : u, weßhalb u = 1200 fl.

Probe:

Man hat in Gemäßheit der I. und II. Auflösung gefunden, daß der erste Kaufmann 1066 ⅔ fl. Gewinnst ꝛc. erhält; man addire demnach zur Probe bey diesen beiden Auflösungen die gefundenen Partialgewinnste, man muß zur Summe den Totalgewinnst, d. i., den ganzen Gewinnst von 6000 fl. erhalten:

a) Gew. des 1ten Kf. od. x	= 1066 ⅔ fl.	= 1066 fl. 40 kr.,
b) — — 2ten — od. y	= 1600 fl.	= 1600 fl. — kr.,
c) — — 3ten — od. z	= 2133 ⅓ fl.	= 2133 fl. 20 kr.,
d) — — 4ten — od. u	= 1200 fl.	= 1200 fl. — kr.,
die Sum̃e aller 4 Gewinnste	= 6000 fl.	= 6000 fl. — kr.

Es sind deßhalb die bey der I. und II. Auflösung vorgenommenen Berechnungen richtig.

Zusatz: Es wird keiner Erwähnung bedürfen, daß man, im Falle die Auflösung der Aufgaben der Regeldetri in Gestalt der Proportion geschieht, die Verkleinerungen ebenfalls vornehmen könne. Weil das Product der äusseren Glieder der geometrischen Proportion jenem der mittleren Glieder gleich ist

(§. 55.), und das geometrische Verhältniß unverändert bleibt, wenn man die beiden Glieder desselben mit der nämlichen Zahl dividirt (§. 50. f.), so kann man jederzeit, im Falle das unbekannte Glied an der 4ten Stelle steht, die Verkleinerung vornehmen, wenn man mit einem gemeinen Maaße das erste Glied der Proportion, und zugleich auch eines der mittleren Glieder ohne Rest dividiren kann. Ist aber das unbekannte Glied an der dritten Stelle, so muß man, wenn die Verkleinerung geschehen soll, mit der nämlichen Zahl das zweyte Glied, und zugleich auch eines der äusseren Glieder ohne Rest dividiren können.

Man habe z. B. nachstehende Proportion, wo das erste und zweyte Glied durch 1000 und 9, und dann das 1te und 3te Glied durch 5 ohne Rest theilbar ist:

$45000 : 9000 = 6000 : u$, man div. die beid. 1ten Gl. mit 1000,
$45 : 9 = 6000 : u$, nun dividire man dieselben mit 9,
$5 : 1 = 6000 : u$, und das 1te und 3te Glied mit 5,
$1 : 1 = 1200 : u$, wo nun $u = 1200$.

Oder es sey z. B. folgende Proportion gegeben, wo das 2te und 1te Glied durch 4, und dann das 2te und 4te Glied durch 5 theilbar ist:

$288 : 100 = x : 40$, man theile das 2te und 1ste Glied mit 4,
$72 : 25 = x : 40$, ferner das 2te und 4te Glied mit 5,
$72 : 5 = x : 8$, wo nun $x = \frac{72 . 8}{5} = \frac{576}{5} = 115\frac{1}{5}$.

§. 88.

B) Regel der zusammengesetzten Gesellschafts-Rechnung.

1) Man multiplicire die Einlage eines jeden Mitgliedes der Gesellschaft mit jener Zahl, welche die Zeit ausdrückt, binnen welcher die jedesmalige Einlage zum gemeinschaftlichen Gewinnste mitwirkte, und addire dann alle diese Producte.

2) Weil mit diesen Producten der treffende Gewinnst im geraden Verhältnisse steht, so bestimme man nach der einfachen geraden Regeldetri die ge-

suchten Gewinnste, und addire zur Probe dieselben, man muß, im Falle die Rechnung richtig ist, zur Summe wieder den ganzen Gewinnst erhalten.

Beyspiel:

Drey Kaufleute legen zusammen:

A.	4000 fl	8	Monat
B.	6000 „	4	—
C.	8000 „	10	—

Sie gewinnen 12000 fl.; wieviel gewinnt nun jeder im Verhältnisse zu seiner Einlage, und zur Zeit, binnen welcher er seinen Beytrag machte?

I. Auflösung:

1) Man multiplicire 4000 mit 8, dann 6000 mit 4, und endlich 8000 mit 10, man erhält, daß $4000 \times 8 = 32000$, dann $6000 \times 4 = 24000$, endlich $8000 \times 10 = 80000$; ferner addire man diese drey Producte, welche nun die Verhältnißzahlen sind, weil im Verhältnisse zu denselben die Vertheilung geschehen muß, man erhält, daß $32000 + 24000 + 80000 = 136000$.

2) Man setze nun Reesisch an:

a) Welcher Gewinnst trifft auf die erste Verhältnißzahl, wenn auf die Summe aller Verhältnißzahlen, somit auf 136000 der Gewinnst von 12000 fl. trifft?

b) Welcher Gewinnst &c.

a) Gew. fl. x | 32000 V. Z.
V. Z. 136000 | 12000 fl. G.

es ist also $x = 2823\,^{9}/_{17}$ fl.

b) Gew. fl. y | 24000 V. Z.
V. Z. 136000 | 12000 fl. Gew.

es ist also $y = 2117\,^{11}/_{17}$ fl.

c) Gew. fl. z | 80000 V. Z.
V. Z. 136000 | 12000 fl. Gew.

es ist also $z = 7058\,^{14}/_{17}$ fl.

Probe:

Man addire, nachdem man vorhin nach den bekannten Reductionsregeln den Werth der hier vorkommenden Brüche in Einheiten niederer Ordnung ausgedrückt hat, diese drey Gewinnste, die Summe muß wieder den ganzen Gewinnst von 12000 fl geben.

A	gewinnt $x = 2823\,^{9}/_{17}$ fl.	$= 2823$ fl. 31 kr. $6\,^{2}/_{17}$ Häll.	
B	— $y = 2117^{11}/_{17}$ „	$= 2117$ „ 38 „ $6^{10}/_{17}$ „	
C	— $z = 7058^{14}/_{17}$ „	$= 7058$ „ 49 „ $3\,^{5}/_{17}$ „	
es ist	$x + y + z = 12000$ fl.	$= 12000$ fl. — „ — „	

II. Auflösung:

a) $136000 : 32000 = 12000 : x$, daher (§. 87. Zus.) $136 : 32 = 12000 : x$, und $17 : 4 = 12000 : x$, weßhalb $x = 2823\,^{9}/_{17}$ fl. $= 2823$ fl. 31 kr. $6\,^{2}/_{17}$ Häll.;

b) $136000 : 24000 = 12000 : y$, daher $136 : 24 = 12000 : y$, und $17 : 3 = 12000 : y$, weßhalb $y = 2117^{11}/_{17}$ fl. $= 2117$ fl. 38 kr. $6^{10}/_{17}$ Häll.;

c) $136000 : 80000 = 12000 : z$, daher $136 : 80 = 12000 : z$, und $17 : 10 = 12000 : z$, weßhalb $z = 7058\,^{14}/_{17}$ fl. $= 7058$ fl. 49 kr. $3^{5}/_{17}$ Häll.

Die Probe würde hier, wie bey der I. Auflösung, gemacht werden.

II.

Die Vermischungs-Regel.

§. 89.

Erklärung und Regel.

a) Die **Vermischungs-Regel** ist der Inbegriff jener Regeln, nach welchen die Größe der verschiedenen Bestandtheile bestimmt wird, woraus eine Sache nach einem festgesetzten Verhältnisse zusammengesetzt werden soll.

Das Verhältniß, nach welchem die Zusammensetzung der einzelnen Theile geschieht, muß schon zum voraus bekannt seyn; durch die Berechnung ist bloß

zu bestimmen, wieviel von jedem Bestandtheile zu nehmen ist, um nach dem gegebenen Verhältnisse ein bestimmtes Quantum zu erhalten.

b) Diese Aufgabe gehört zur einfachen geraden Regeldetri, indem zu einem 2 „ 3 „ oder 4mal größeren Quantum auch das 2 „ 3 „ oder 4fache eines jeden einzelnen Theiles zu nehmen ist; es wird hier ein Ganzes nach einem bestimmten Verhältnisse aus mehreren Theilen zusammengesetzt, während bey der Gesellschaftsrechnung ein Ganzes nach einem bestimmten Verhältnisse vertheilet wird, weßhalb die Auflösung dieser Aufgabe nach der im §. 87. aufgestellten Regel geschieht.

Beyspiel:

Wenn bey einem guten Schießpulver zu 16 Loth Salpeter, 3 Loth Kohlen, und 2 Loth Schwefel gehören, wieviel von jeder Art gehören zu 400 Centner?

I. Auflösung:

1) Man addire die 3 gegebenen Verhältnißzahlen, man erhält zur Summe derselben 21 Loth, weil 16 L. + 3 L. + 2 L. = 21 Loth.

2) Man setze nun Reesisch an:

a) Wieviel Centner Salpeter muß man zu 400 Centn. Schießpulver nehmen, wenn 1 Centn. 100 Pfund, 1 Pf. 32 Loth hat, und zu 21 Loth 16 Loth Salpeter erfodert werden, während 32 Loth 1 Pfund, und 100 Pf. 1 Centn. geben (§. 82.)?

b) Wieviel Centner ꝛc.

3) Weil hier die absteigende Reduction durch die aufsteigende aufgehoben wird, indem man immer das Nämliche erhält, wenn man die Centner auf Lothe, und diese wieder auf Centner reducirt, so mache man den Ansatz auf folgende Weise kürzer:

a) Wieviel Centner Salpeter gehören zu 400 Centn. Schießpulver, wenn zu 21 Loth 16 Loth Salpeter gehören?

b) Wieviel Centner ꝛc.

a) S. C. x	400 C. Sch. Pf.
C. 1	100 Pf.
Pf. 1	32 Loth
L. 21	16 L. Salp.
L. 32	1 Pf.
Pf. 100	1 C.

b) K. C. y	400 C. Sch. Pf.
C. 1	100 Pf.
Pf. 1	32 L.
L. 21	3 L. Kohl.
L. 32	1 Pf.
Pf. 100	1 C.

c) Sch. C. z	400 C. Sch. Pf.
C 1	100 Pf.
Pf. 1	32 L.
L. 21	2 L. Schw.
L. 32	1 Pf.
Pf. 100	1 C.

Kürzer:

a) S. C. x	400 C. Sch. Pf.
Loth 21	16 L. Salp.

also ist $x = 304\frac{16}{21}$ C. Salp.

b) K. C. y	400 C. Sch. P.
Loth 21	3 L. Kohl.

also ist $y = 57\frac{3}{21}$ C. Kohl.

c) Sch. C. z	400 C. Sch. P.
Loth 21	2 L. Schw.

also ist $z = 38\frac{2}{21}$ C. Schw.

Daher müssen zu 400 Centn. Schießpulver 304 16/21 Centn. Salp., 57 3/21 C. Kohl., und 38 2/21 C. Schwefel genommen werden.

Die Probe rücksichtlich dieser Auflösung.

Zur Probe addire man, nachdem man vorhin die hier vorkommenden Brüche auf Einheiten niederer Ordnung reducirt hat, diese 3 Resultate, welche die Größe der zur Mischung zu nehmenden Bestandtheile ausdrücken, ihre Summe muß, im Falle die Rechnung richtig ist, wieder 400 Centner geben:

a) $x =$	$304\frac{16}{21}$ C.	$=$ 304 C.	76 Pf.	$6\frac{2}{21}$ Loth
b) $y =$	$57\frac{3}{21}$ „	$=$ 57 „	14 „	$9\frac{3}{21}$ „
c) $z =$	$38\frac{2}{21}$ „	$=$ 38 „	9 „	$16\frac{16}{21}$ „
Sum. $=$	400 Centn.	$=$ 400 C.	— „	— „

Anmerkung: Beym 2ten Ansatze könnte man mit 3 verkleinern, weil 21 und 3 durch 3 theilbar ist; man verkleinert aber hier deßwegen nicht, weil bey der Probe die 3 gefundenen Resultate addirt werden müssen, und die Addition dadurch erleichtert ist, daß alle 3 Brüche den nämlichen Nenner 21 haben, und somit nicht mehr unter einerley Benennung zu bringen sind.

II. Auflösung:

Man addire, wie vorhin, die 3 gegebenen Verhältnißzahlen, und setze dann folgende Proportionen an:

a) 21 L. : 16 L. = 400 Centn. : x C., daher
21 : 16 = 400 : x, weßhalb x = 304 16/21 Centn.;

b) 21 L. : 3 L. = 400 Centn. : y C., daher
21 : 3 = 400 : y, weßhalb y = 57 3/21 Centn.;

c) 21 L. : 2 L. = 400 Centn. : z C., daher
21 : 2 = 400 : z, weßhalb z = 38 2/21 Centn.

Wie hier die Probe gemacht wird, ist bey der vorigen Auflösung gezeigt worden.

III.

Steuer-Rechnungen.

§. 90.

Erklärung und Regel.

a) Unter den Steuer-Rechnungen versteht man diejenigen Rechnungen, wo im Verhältnisse zur Steuer, welche die Mitglieder des Staates bezahlen müssen, die Größe gewißer Lasten oder Emolumente bestimmt wird.

b) Weil bey den Steuerrechnungen der Voraussetzung gemäß die Steuer der Maaßstab ist, nach welchem die Abgaben erhoben, und gemeinschaftliche Lasten oder Vortheile vertheilet werden, so ist z. B. bey einer 2 „ 3 oder 4mal größeren Steuer auch eine 2 „ 3 oder 4mal größere Abgabe zu bezahlen, weßhalb die einzelnen Steuern mit den correspondirenden Abgaben gerade proportionirt sind.

Um deswillen gehören diese Aufgaben zur einfachen geraden Regeldetri, und werden ganz nach der im §. 87. angegebenen Vorschrift aufgelöst.

Beyspiel:

Drey Dörfer haben mit einander im Verhältnisse zur Steuer, welche sie bezahlen, eine gemeinschaftliche Last von 8720 fl. zu tragen; das Dorf A bezahlt

480 fl., das Dorf B 730 fl., und das Dorf C 900 fl. Steuer; wieviel trifft nun auf jedes zu bezahlen?

I. Auflösung:

1) Man addire die hier vorkommenden Verhältnißzahlen, nämlich die Steuern diese 3 Dörfer, man erhält zur Summe 2110 fl., indem 480 fl. + 730 fl. + 900 fl. = 2110 fl.

2) Nach den im §. 74. bey der einfachen geraden Regeldetri aufgestellten Regeln, oder auch nach Vorschrift des §. 87. setze man nun Reesisch an:

a) Welche Abgabe trifft auf die Steuer des Dorfes A, somit auf die Steuer von 480 fl., wenn auf die gesammte Steuer von 2110 fl. die ganze Abgabe von 8720 fl. trifft?

b) Welche Abgabe etc.

a) Abg. fl.	x	480 fl. St.	b) Abg. fl.	y	730 fl. St.
St. fl.	2110	8720 fl. Abg.	St. fl.	2110	8720 fl. Abg.

also ist $x = 1983\,{}^{147}/_{211}$ fl. also ist $y = 3016\,{}^{184}/_{211}$ fl.

c) Abg. fl.	z	900 fl. St.
St. fl.	2110	8720 fl. Abg.

also ist $z = 3719\,{}^{91}/_{211}$.

Probe:

Zur Probe addire man diese 3 gefundenen Resultate, man muß, im Falle die Rechnung richtig ist, wieder 8720 fl. erhalten:

		fl.	fl.	kr.	Häll.
1) A bezahlt	x fl.	$= 1983\,{}^{147}/_{211}$	= 1983	41	$6\,{}^{86}/_{211}$;
2) B —	y fl.	$= 3016\,{}^{184}/_{211}$	= 3016	52	$2\,{}^{122}/_{211}$;
3) C —	z fl.	$= 3719\,{}^{91}/_{211}$	= 3719	25	$7\,{}^{3}/_{211}$;

somit zahlen diese 3 Dörfer zusammen = 8720 fl.

II. Auflösung:

Nach Vorschrift des §. 61. erhält man folgende Proportionen:

a) 2110 fl. St. : 480 fl. St. = 8720 fl. Abg. : x fl. A., daher 2110 : 480 = 8720 : x, weßhalb $x = 1983\,{}^{147}/_{211}$ fl.;

b) 2110 fl. St. : 730 fl. St. = 8720 fl. Abg. : y fl. A., daher 2110 : 730 = 8720 : y, weßhalb $y = 3016\,{}^{184}/_{211}$ fl.;

c) 2110 fl. St. : 900 fl. St. = 8720 fl. Abg. : z fl. A., daher 2110 : 900 = 8720 : z, weßhalb z = 3719 $^{91}/_{211}$ fl.

Wie hier die Probe gemacht wird, ist so eben bey der vorigen Auflösung gezeigt worden.

I. Zusatz: Die Auflösung solcher Aufgaben kann auch dadurch geschehen, daß man allererst auf die angezeigte Weise bestimmt, wieviel z. B. hier auf 1 fl. Steuer zu bezahlen kömmt, indem man ansetzt: „Welche Abgabe trifft auf 1 Gulden Steuer, wenn auf die gesammte Steuer von 2110 fl. die ganze Abgabe von 8720 fl. trifft?“ Man findet, daß auf 1 fl. Steuer die Abgabe von 4 $^{28}/_{211}$ fl. trifft.

Nun bestimme man durch eine bloße Multiplication, was es auf jedes Dorf trifft, indem man 4 $^{28}/_{211}$ mit 480, dann 4 $^{28}/_{211}$ mit 730, und endlich 4 $^{28}/_{211}$ mit 900 multiplicirt, man findet, daß 4 $^{28}/_{211}$ × 480 = 1983 $^{147}/_{211}$ fl., dann 4 $^{28}/_{211}$ × 730 = 3016 $^{184}/_{211}$ fl., und endlich 4 $^{28}/_{211}$ × 900 = 3719 $^{91}/_{211}$ fl.

Es versteht sich von selbst, daß bey dieser Auflösung die Reduction und Probe auf die vorige Weise gemacht wird.

II. Zusatz: Kommen bey den Steuerrechnungen, was mehrentheils der Fall ist, Einheiten verschiedener Ordnung, somit Gulden, Kreutzer und Häller vor, so müssen sie auf Einheiten einer und der nämlichen Ordnung reducirt werden.

Reducirt man die niederen Einheiten auf höhere, so erhält man ächte Brüche, die man mit den vorhandenen höheren Einheiten in eine Summe bringt.

Werden aber die höheren Einheiten auf niedere reducirt, so addirt man die gegebenen niederen Einheiten zu den jedesmal durch die Reduction erhaltenen Einheiten der nämlichen Ordnung.

Im ersten Falle erhält man Brüche, die sich aber beym Reesischen Ansatze einrichten, und aufheben lassen; deßwegen ist dieses in vielen Fällen bequemer, als wenn man alles auf die niedrigste Benennung bringen würde, wo man dann mit großen Zahlen zu multipliciren, und zu dividiren hatte.

Es komme z. B. bey einer Aufgabe die Steuer

von 4820 fl. 30 kr. 4 Häller vor; nach den sowohl im §. 80., als auch im II. Hauptstücke des I. Theiles aufgestellten Reductionsregeln findet man, daß 30 kr. $= \frac{1}{2}$ fl., 4 Häller $= \frac{1}{120}$ fl., und daher 30 kr. $+$ 4 Häller $= \frac{1}{2}$ fl. $+ \frac{1}{120}$ fl. $= \frac{61}{120}$ fl. (§. 24.), weßhalb 4820 fl. $+$ 30 kr. $+$ 4 Häller $=$ 4820 fl. $+ \frac{61}{120}$ fl. $= 4820 \frac{61}{120}$ fl. $= \frac{578461}{120}$ fl. (§. 28.).

Reducirt man aber entweder nach §. 79., oder nach den im I. Theile aufgestellten Reductionsregeln die Gulden auf Kreutzer, und dann die Kreutzer auf Häller, so erhält man, daß 4820 fl. 30 kr. 4 Häller $=$ 2313844 Häller (I. §. 91. Anm.).

Wird nun nach der beendeten Reduction die weitere Berechnung vorgenommen, so erhält man auch bey den gesuchten Resultaten Gulden oder Häller, je nachdem man ohne eine fernere Reduction die Berechnung mit Gulden oder Hällern vornimmt.

Anmerkung: Was hier in Absicht auf die Steuerrechnungen bemerkt wurde, kömmt bey mehreren anderen Aufgaben der Regeldetri in Anwendung, wo ebenfalls in der anfangs gegebenen Aufgabe Einheiten verschiedener Benennung vorkommen; daß in diesem Falle nicht allemal das Reduciren nothwendig sey, ist bereits durch die Auflösung des im §. 74. angeführten III. Beyspieles gezeigt worden.

IV.

Brand-Assecuranz-Rechnungen.

§. 91.

Erklärung und Regel.

a) Wenn eine Gesellschaft die Verbindlichkeit übernimmt, den unter ihren Mitgliedern durch eine Feuersbrunst entstehenden Schaden einigermaßen zu ersetzen, so heißt diese Veranstaltung eine Feuer-, oder Brand-Assecuranz, während die dabey vorkommenden Berechnungen Brand-Assecuranz-Rechnungen genannt werden.

b) Da bey gleicher Gefahr der assecurirten Gebäude der Beytrag eines jeden Mitgliedes der Größe

des Ersatzes, den ein Glied in ähnlichen Unglücksfällen für sich fodert, also dem angegebenen Werthe der Gebäude, der den wahren Werth nie übersteigen darf, gerade proportionirt seyn muß, so geschieht die Berechnung ebenfalls nach den bey der Gesellschaftsregel im §. 87. angegebenen Vorschriften.

c) Der Werth des während einer bestimmten Zeit erlittenen Schadens mit den Regie-Kösten ist diejenige Zahl, die hier in proportionirte Theile getheilt werden muß, die Werthe der einzelnen Gebäude sind die Verhältnißzahlen, und die Summe aller dieser Werthe — der Werth aller assecurirten Gebäude bildet die Summe dieser Verhältnißzahlen.

d) Um zu finden, was nun jedes Mitglied nach dem angegebenen Werthe seines in die Brand-Assecuranz aufgenommenen Gebäudes beytragen müsse, und dadurch die während einer bestimmten Zeit vorgefallenen Brandschäden mit den damit verbundenen Regie-Kösten zu vergüten, so berechnet man die Vergütung, die von 100 fl. geleistet werden soll, findet man z. B. dafür 1¾ kr., so sagt man, daß nun 1¾ kr. Procent erhoben werden.

e) Es wird aber gewöhnlich, theils um die Bruchrechnung zu vermeiden, theils um künftige Regie-Ausgaben bestreiten zu können, und für die Folge einen Vorschuß zu bekommen, von 100 fl. etwas mehr bezogen, als geradezu die Berechnung auswirft.

Beyspiel:

Im königl. baier. Intelligenzblatte der Hauptstadt des Illerkreises Kempten erschien den 24. July 1813 die VII. und letzte Hauptrechnung über das königl. baier. allgemeine Brand-Assecuranz-Institut der ehemaligen Provinz Schwaben für die 3 Quartale des VII. Assecuranz-Jahres vom 1. Jäner bis letzten September 1811.

In Gemäßheit dieser Bekanntmachung beläuft sich die ganze Assecuranz-Kapitals-Summe auf 45'996.418 fl., und die für diese Zeit treffende Brandschadensvergütung auf 18034 fl. 20 kr.; zugleich wurden unterm 8. Oc-

tober 1812. 1 3/4 kr. für 100 fl., somit 1 3/4 Procent zur Bestimmung der Concurrenz-Quote ausgeschrieben, welche nach Abzug der zu 2 Pfenning pr. Gulden auf 108 fl. 8 kr. 6 Häller sich belaufenden Einzugsgebühr 13307 fl. 28 kr. 8 Häller abwerfen, während sich die ganze Vergütungs-Summe auf 11748 fl. 52 kr. 2 hl. beläuft, indem von der vorhin erwähnten Brandschadensvergütung der Ueberschuß des VI. Assecuranzjahres 1810 pr. 7453 fl. 47 kr. 7 hl. abgezogen, und zugleich die Ausgaben auf das Kommissions-Personale, und dann die übrigen Regie-Kösten pr. 1168 fl. 20 kr. 1 hl. dazu addirt wurden.

Nachdem dieses vorausgesetzt wird, so ist nun die Aufgabe: „Welche Concurrenzquote, und welche Einzugsgebühren treffen auf die Stadt und auf das kön. Landgericht Kempten, da das Assecuranz-Kapital der ersteren 887208 fl., und jenes des letzteren 813580 fl. beträgt?

Auflösung:

1) Man mache folgenden Reesischen Ansatz: „Wie viel Gulden Concurrenz treffen auf das Assecuranz-Kapital der Stadt Kempten von 887208 fl. (des kön. Landgerichtes Kempten von 813580 fl.), wenn von 100 fl. Assecuranz-Kapital 1 3/4 kr. erhoben werden, und 60 kr. 1 Gulden geben?

a)

C. fl.	x	887208 fl. Ass. K.
Ass. K. fl.	100	1 3/4 kr.
kr.	60	1 fl.

also ist $x = 258\frac{769}{1000}$ fl.

b)

C. fl.	y	813580 fl. Ass. K.
Ass. K. fl.	100	1 3/4 kr.
kr.	60	1 fl.

also ist $y = 237\frac{353}{1200}$ fl.

Es treffen daher auf die Stadt Kempten $258\frac{769}{1000}$ fl. = 258 fl. 46 kr. 1 3/25 hl., somit 258 fl. 46 kr. 1 hl. Concurrenz, und auf das k. Landgericht Kempten $237\frac{353}{1200}$ fl. = 237 fl. 17 kr. 5 1/5 hl., somit beynahe 237 fl. 17 kr. 5 hl. Concurrenz.

2) Nun bestimme man auf die nämliche Weise die Einzugsgebühren, indem man ansetzt: „Wie viel Gulden Einzugsgebühr trifft auf die Concurrenz der Stadt Kempten von 258 $^{769}/_{1000}$ fl. (des königl. Landgerichts Kempten von 237 $^{353}/_{1200}$ fl.) wenn von einem Gulden 2 Pfenning Einzugsgebühr erhoben werden, und 240 Pf. 1 Gulden geben (I. §. 88. C. S. 147.)?

E. G. fl. z	258 $^{769}/_{1000}$ fl. E.	E. G. fl. u	237 $^{353}/_{1200}$ fl. E.
E. fl. 1	2 Pfenn.	E. fl. 1	2 Pf.
Pf. 240	1 fl.	Pf. 240	1 fl.
also ist z = 2 $^{18769}/_{120000}$ fl.		also ist u = 1 $^{140653}/_{144000}$ fl.	

Es treffen daher auf die Stadt Kempten 2 $^{18769}/_{120000}$ fl. = 2 fl. 9 kr. 3 $^{19}/_{250}$ hl., somit 2 fl. 9 kr. 3 hl., und auf das königl. Landgericht Kempten 1 $^{140653}/_{144000}$ fl., somit beynahe 1 fl. 58 kr. 5 hl. Einzugsgebühren.

Anmerkung: Es ist aus dem Gesagten hinlänglich ersichtlich, wie solche Aufgaben in der Gestalt der Proportion aufzulösen sind, wie auch, wie bey denselben die Probe gemacht werden muß.

V.

Einige Aufgaben in Absicht auf die Alligations- oder Verbindungs-Regel.

§. 92.

I. Aufgabe: Man giebt den Werth zweyer Dinge, die zu einem Ganzen gemischt werden sollen, und die Größe des durch die Mischung entstandenen Ganzen; man soll die Größe der zur Mischung zu nehmenden Dinge bestimmen, d. i., man soll durch Rechnung finden, wie viel von jeder Sorte zu nehmen sey, um für ein bestimmtes Maaß vom Ganzen den gegebenen mittleren Werth zu bekommen.

Auflösung:

1) Man subtrahire den Werth der geringeren

Sorte von jenem der besseren; ferner subtrahire man den Werth der geringeren Sorte von dem eines bestimmten Maaßes vom Gemische, und suche der Ordnung nach zu diesen beiden Differenzen, und zu dem durch die Mischung erhaltenen Ganzen die 4te geometrische Proportinalzahl nach Vorschrift des §. 55., man erhält zum Resultate eine Zahl, welche ausdrückt, wieviel Dinge der besseren Art zur Mischung zu nehmen sind.

2) Diese Zahl subtrahire man von dem Quantum des ganzen Gemisches, der Rest zeigt dann an, wieviel dazu von der geringeren Sorte zu nehmen ist.

Beyspiel:

Ein Goldschmid hat zweyerley Silber, ein 14löthiges, und ein 9löthiges Silber; nun möchte er von diesen beiden Sorten zu 4 Mark = 64 Loth (weil 1 Mark 16 Loth hat) so viel zur Mischung nehmen, daß er dann 12löthiges Silber bekömmt; wieviel von jeder Sorte darf er dazu nehmen (s. §. 88. A.)?

Auflösung:

1) Man subtrahire 9 von 14, man erhält zur Differenz 5, weil $14 - 9 = 5$; ferner subtrahire man 9 von 12, man erhält zur Differenz 3, da $12 - 9 = 3$.

2) Man setze nun nachstehende Proportion an, nachdem man vorhin die Anzahl der Lothe, die von der besseren Sorte zu nehmen sind, mit x ausgedrückt hat:

$$5 : 3 = 64 : x, \text{ daher ist } x = \frac{64 \,.\, 3}{5} = 38\,^2/_5 \text{ (§. 55.)}.$$

Es werden also vom 14löthigen Silber $38\,^2/_5$ Loth genommen.

3) Man subtrahire $38\,^2/_5$ von 64, man erhält $25\,^3/_5$, d. i., vom 9löthigen Silber sind $25\,^3/_5$ Loth zu nehmen.

Probe:

1) Man berechne, wieviel feines Silber sowohl in $38\frac{2}{5}$ L. des 14 löthigen, und in den $25\frac{3}{5}$ Loth des 9 löthigen Silbers, als auch in dem ganzen Gemische von 64 L. 12 löthigen Silbers enthalten ist, indem man ansetzt:

a) Wie viele Lothe feines Silber sind in $35\frac{2}{5}$ L. 14 löthigen Silber enthalten, wenn in 16 Loth solchen Silbers 14 Loth feines Silber enthalten ist;

b) Wie viele Lothe 2c.

a) f. S. L.	y	$38\frac{2}{5}$ L. 14löth. S.
14löth. S. L.	16	14 L. f. S.

wo nun $y = 33\frac{48}{80} = 33\frac{3}{5}$ L.

b) f. S. L.	z	$25\frac{3}{5}$ L. 9löth. S.
9löth. S. L.	16	9 L. f. S.

es ist $z = 14\frac{32}{80} = 14\frac{2}{5}$ L.

c) f. S. L.	u	64 L. 12löth. S.
12löth. S. L.	16	12 L. f. S.

also ist $u = 48$ L.

2) Man addire das im 14 „ und im 9 löthigen Silber enthaltene feine Silber, man erhält zur Summe 48 L., indem $33\frac{3}{5}$ L. $+$ $14\frac{2}{5}$ L. $=$ 48 L., weßhalb die vorhin angestellte Berechnung richtig ist.

§. 93.

II. Aufgabe: Man giebt den Werth und die Größe der einzelnen Dinge, welche mit einander gemischt werden; man soll daraus den Werth eines bestimmten Maaßes des ganzen Gemisches finden.

Auflösung:

1) Man berechne den Werth der einzelnen Dinge, welche zur Mischung genommen werden, und bringe diese Werthe in eine Summe.

2)

2) Eben so addire man die Größe der einzelnen Dinge, um das Quantum des ganzen Gemisches zu finden, und berechne dann den Werth für ein bestimmtes Maaß desselben.

Beyspiel:

15 Schäffel Waizen werden mit 12 Schäffel Roggen vermischt, wovon das erstere 17 fl., und das letztere 15 fl. kostet; wieviel wird nun ein Schäffel des gemischten Getraides werth seyn?

Auflösung:

1) Diesen gesuchten Werth drücke man einsweilen mit x aus, und addire die beiden Zahlen 15 und 12, man erhält zur Summe 27, d. i., das Quantum des ganzen Gemisches beträgt 27 Schäffel.

2) Man berechne nun den Werth des Waizens, und den des Roggens, indem man ansetzt:

a) Wieviel Gulden kosten 15 Sch. Waizen, wenn 1 Schäffel 17 fl. kostet;

b) Wieviel Gulden 2c.

a) fl. y | 15 Sch. W.
Sch. W. 1 | 17 fl.

daher ist $x = 255$ fl.

b) fl. z | 12 Sch. R.
Sch. R. 1 | 15 fl.

$z = 180$ fl.

3) Man addire diese beiden Werthe, man erhält 435 fl., da 255 fl. + 180 fl. = 435 fl., und berechne nun, was ein Schäffel des Gemisches kostet, da es jetzt schon bekannt ist, daß das ganze Gemisch, somit 27 Schäffel 435 fl. kosten:

fl. x | 1 Schäffel
Sch. 27 | 435 fl.

wo nun $x = {}^{435}/_{27} = 16^{3}/_{27} = 16^{1}/_{9} = 16$ fl. 6 kr. $5^{1}/_{3}$ hl.

Es kostet also unter diesen Bedingungen 1 Schäffel des gemischten Getraides $16\,{}^{1}/_{9}$ fl. = 16 fl. 6 kr. $5\,{}^{1}/_{3}$ hl.

Probe:

1) Man setze Reesisch an: Wenn 1 Schäffel $16\frac{1}{9}$ fl. kostet, was kosten 27 Schäffel?

fl.	u	27 Sch.
Sch.	1	$16\frac{1}{9}$ fl.

es ist u = 435 fl.

Der Werth des ganzen Gemisches beträgt wieder 435 fl., mithin so viel, als die beiden zur Mischung genommenen Sorten zusammen, weßhalb die vorhin angestellte Berechnung richtig ist.

§. 94.

III. **Aufgabe:** Es ist bekannt der Werth eines bestimmten Maaßes, und das Quantum des Gemisches, mithin der Werth desselben, und es sind bekannt die einzelnen zur Mischung genommenen Dinge mit Ausnahme eines einzigen, man soll den Werth dieses letzteren berechnen.

Auflösung:

1) Man berechne die Werthe aller einzelnen Dinge mit Ausnahme desjenigen, wofür der Werth gesucht werden soll, und zugleich suche man den Werth des ganzen Gemisches.

2) Die Summe der so eben erwähnten Werthe subtrahire man von dem Werthe des ganzen Gemisches, der Rest giebt den für das letzte Ding gesuchten Werth, woraus man dann für ein bestimmtes Maaß desselben den treffenden Werth berechnet.

Beyspiel:

Es hat Jemand einen Wein, wovon die Maß 30 kr. kostet, und einen anderen, wovon der Werth für eine Maß gefunden werden soll; von der ersten Sorte wurden zur Mischung $33\frac{1}{3}$ Maß, und von der

zweyten wurden dazu 26 ⅔ Maß genommen; wie theuer ist nun die zur Mischung genommene zweyte Sorte, wenn 1 Maß des gemischten Weines 24 kr. kostet?

Auflösung:

1) Man berechne den Werth der ersten Sorte, wovon 1 Maß 30 kr. kostet, und zugleich, nachdem man vorhin, um das Quantum des ganzen Gemisches zu finden, 33 ⅓ M. zu 26 ⅔ Maß addirt hat, den Werth des ganzen Gemisches, indem man ansetzet:

a) Wieviel Gulden kosten 33 ⅓ Maß, wenn 1. Maß 30 kr. kostet, und 60 kr. 1 Gulden geben?

b) Wieviel ꝛc.

a)			b)		
fl.	y	33 ⅓ M.	fl.	z	60 M.
M.	1	30 kr.	M.	1	24 kr.
kr.	60	1 fl.	kr.	60	1 fl.

es ist y = 16 ⅔ fl. z = 24 fl.

2) Man subtrahire 16 ⅔ fl. von 24 fl., man erhält zum Reste 7 ⅓ fl., und berechne nun daraus, was eine Maß kostet, da von der zweyten Sorte 26 ⅔ Maß genommen wurden:

fl.	x	1 M.
M.	26 ⅔	7 ⅓ fl.

also ist x = $^{22}/_{80}$ = $^{11}/_{40}$ fl.

Es kostet daher davon 1 Maß $^{11}/_{40}$ fl. = 16 ½ kr.

Probe:

1) Man berechne nun, was 26 ⅔ Maß kosten, da 1 Maß 16 ½ kr. kostet:

fl.	u	26 ⅔ M.
M.	1	16 ½ kr.
kr.	60	1 fl.

daher ist u = 7 ⅓ fl.

2) Man addire 7 ⅓ fl. = 7 fl. 20 kr. zu 16 ⅔ fl. = 16 fl. 40 kr., man erhält zur Summe den Werth des ganzen Gemisches, nämlich 24 fl., weil 7 ⅓ fl.

+ $16\frac{2}{3}$ fl. = 24 fl., oder 7 fl. 20 kr. + 16 fl. 40 kr. = 24 fl.; um deswillen ist die vorhin angestellte Berechnung richtig, und 1 Maß der zweyten Sorte kostet wirklich $16\frac{1}{2}$ kr.

Anmerkung: 1) Die Verbindungs- oder Alligationsregel (Regula alligationis), wie es aus den vorstehenden Aufgaben ersichtlich ist, wird diejenige Regel genannt, welche angiebt, nach welchem Verhältnisse zwey oder mehrere Dinge gemischt werden sollen, damit ein mittlerer Werth herauskomme.

2) Ich führte hier in Absicht auf diese Regel einige Beyspiele für die leichteren Fälle an, wo nur zwey Dinge mit einander gemischt wurden; die Auflösung der schwereren Beyspiele geschieht nach Formeln, derer allgemeine Giltigkeit in der Buchstabenrechnung erwiesen wird, auf eine leichtere, und bequemere Weise; um deswillen trage ich jetzt dieselben nicht vor.

VI.

Einige Aufgaben, wo die Reductionen verschiedener Maaße, Gewichte und Münzen vorkommen.

§. 95.

I. Aufgabe, das Decimalmaaß in das Duodecimalmaaß, und umgekehrt, zu verwandeln.

Auflösung:

a) Die geometrische Ruthe (die Ruthe im Decimalmaaße) ist 10 Fuß lang (I. §. 79. c.), und im Duodecimalmaaße ist die nämliche Ruthe eine Länge von 12 Fuß (I. §. 79. Nro. 9.), es ist daher 1 Decimalruthe = 10 Fuß, und eine Duodecimalruthe = 12 Fuß, daher sind 10 Decimalfuß = 12 Duodecimalfuß (I. §. 10. Nro. 4.), d. h., im Decimalmaaße hat die Ruthe 10 Fuß, und im Duodecimalmaaße hat dieses nämliche Längenmaaß 12 Fuß; es geben also 10 Fuß nach der Decimaleintheilung 12 solche

Fuß, welche letztere man dadurch erhält, daß man die nämliche Ruthe im Duodecimalmaaße in 12 gleiche Theile theilet.

Was hier von der Ruthe gesagt wird, ist eben so von dem Fuß, vom Zoll, von der Linie ꝛc. zu verstehen, wie dieses aus den beiden im I. Theile im §. 79. auf Seite 124 angeführten Tabellen ersichtlich ist.

Bey der Reduction des Decimalmaaßes in das Duodecimalmaaß, und umgekehrt, hat man jederzeit eine Aufgabe der einfachen geraden Regeldetri, um deswillen geschieht dieselbe nach folgender Regel:

Ist das Decimalmaaß auf das Duodecimalmaaß zu reduciren, so mache man den Ansatz: „Wieviel Duodecimal-Fuß (Zoll — Linien — Scrupel) geben die zu reducirenden Decimal-Fuß (Zoll — Linien — Scrupel), da 10 Decimal-Fuß (Zoll — Linien — Scrupel) 12 Duodecimal-Fuß (Zoll — Linien — Scrupel) geben?

2) Ist aber das Duodecimalmaaß in das Decimalmaaß zu verwandeln, so mache man folgenden Ansatz: „Wieviel Decimal-Fuß (Zoll — Linien — Scrupel) geben die zu reducirenden Duodecimal-Fuß (Zoll — Linien — Scrupel), da 12 Duodecimal-Fuß (Zoll — Linien — Scrupel) 10 Decimal-Fuß (Zoll — Linien — Scrupel) geben?

b) Die Quadratruthe hält im Decimalmaaße 100 □ Fuß, und im Duodecimalmaaße hält dieses nämliche Flächenmaaß 144 □ Fuß (I. §. 80. Nro. 5.), um deswillen sind 100 Decimal-Quadrat-Fuß = 144 Duodecimal-Quadrat-Fuß, und umgekehrt 144 Doudecimal □ Fuß sind = 100 Decimal □ Fuß. Bey den □ Zollen, □ Linien, und □ Scrupeln verhält sich die Sache eben so, wie dieses aus den im I. Theile im §. 80. S. 126. angeführten beiden Tabellen ersichtlich ist.

Die Reduction geschieht hier nach folgender Regel:

1) Sind z. B. Decimal □ Zoll auf Duodecimal □ Zoll zu reduciren, so macht man folgenden Ansatz: Wieviel Duodec. □ Zoll geben die zu reducirenden Decimal □ Zoll, da 100 Decimal □ Zoll 144 Duodec. □ Zoll geben?

2) Sind aber z. B. Doudec. □ Zoll auf Decimal □ Zoll zu reduciren, so macht man diesen Ansatz: „Wieviel Dec. □ Zoll geben die zu reducirenden Duodec. □ Zoll, da 144 Duodec. □ Zoll 100 Decimal □ Zoll geben?

c) Die Kubikruthe hält im Decimalmaaße 1000, und im Duodecimalmaaße 1728 Kubikfuß, es geben also 1000 Decimal-Kubikfuß 1728 Duodecimal-Kubikfuß; eben so sind 1000 Decimal-Kubikzoll = 1728 Duodecimal-Kubikzoll, 1000 Decimal-Kubiklinien sind = 1728 Duodecimal-Kubiklinien rc., und umgekehrt 1728 Duodecimal-Kubikzoll sind = 1000 Decimal-Kubikzoll rc. (I. §. 81.).

In diesem letzten Falle geschieht die Reduction auf folgende Weise:

1) Sind z. B. Decimal-Kubikzoll auf Duodecimal-Kubikzoll zu reduciren, so mache man diesen Ansatz: „Wieviel Duodecimal-Kubikzoll geben die zu reducirenden Decimal-Kubikzoll, da 1000 Decimal-Kubikzoll 1728 Duodecimal-Kubikzoll geben?

2) Sind aber z. B. Duodecimal-Kubikzoll auf Decimal-Kubikzoll zu reduciren, so mache man folgenden Ansatz: „Wieviel Decimal-Kubikzoll geben die zu reducirenden Duodecimal-Kubikzoll, da 1728 solche Kubikzoll 1000 Decimal-Kubikzoll geben?

Beyspiele:

a) Wie viele Decimal-Fuß geben 4780 Duodecimal-Fuß?

b) Wieviel Duodecimal □ Zoll geben 40830 Decimal □ Zoll?

c) Die gesetzmäßige Größe des baierischen Schäffels beträgt 208 baierische Maß, oder 8944 baierische Decimal-Kubikzoll (I. §. 83. Nro. 2.), wie viel hält nun dasselbe baier. Duodecimal-Kubikzoll?

Auflösung:

Man setzte Reesisch an:

a) Wieviel Decimalfuß geben 4780 Duodecimalfuß, wenn 12 solche Fuß 10 Decimalfuß geben?

b) Wieviel Duodecimal □ Zoll geben 40830 Decimal □ Zoll, wenn 100 Decimal □ Zoll 144 Decimal □ Zoll geben?

c) Wieviel Duodecimal-Kubikzoll geben 8944 Decimal-Kubikzoll, wenn 1000 solche Kubikzoll 1728 Duodecimal-Kubikzoll geben?

a)

Dec. Fuß	x	4780 Duodec. Fuß
Duod. F.	12	10 Dec. F.

es ist x = $3983\frac{1}{3}$ Dec. Fuß.

4780 Duodecimal-Fuß geben daher $3983\frac{1}{3}$ Decimal-Fuß.

Probe:

Duod. F.	y	$3983\frac{1}{3}$ Decim. F.
Dec.	10	12 Duod. F.

daher ist y = 4780 Duod. Fuß.

Es geben also $3983\frac{1}{3}$ Decimalfuß wieder 4780 Duodecimalfuß.

b)

Duod. □ Z.	x	40830 Dec. □ Zoll
Dec. □ Z.	100	144 Duod. □ Zoll

es ist x = $58795\frac{1}{5}$ Duod. □ Zoll.

40830 Decimal □ Zoll geben daher $58795\frac{1}{5}$ Duodecimal □ Zoll.

Probe:

Dec. □ Z. y | 58795 1/5 Duod. □ Zoll
Duod. □ Z. 144 | 100 Dec. □ Zoll

es ist y = 40830 Dec. □ Zoll.

58795 1/5 Duodecimal □ Zoll geben daher wieder 40830 Decimal □ Zoll.

c) Duod. K. Z. x | 8944 Dec. K. Z.
Dec. K. Z. 1000 | 1728 Duod. K. Z.

daher ist x = 15455 232/1000 Duod. K. Z.

Es geben also 8944 baier. Decimal-Kubikzoll 15455 232/1000 baier. Duodecimal-Kubikzoll.

Probe:

Dec. K. Z. y | 15455 232/1000 Duod. K. Z.
Duod. K. Z. 1728 | 1000 Dec. K. Z.

es ist y = 8944 Dec. K. Zoll.

§. 96.

II. **Aufgabe, ausländische Maaße und Gewichte in vaterländische zu verwandeln, und umgekehrt.**

I. Beyspiel:

Wieviel baierische Chausseemeilen geben 50 österreichische Postmeilen?

Auflösung:

1) Aus denjenigen Tabellen, welche am Ende des III. Theiles im Anhange in Betreff der ausländischen Maaße und Gewichte angeführt werden, ist bekannt, daß eine baierische Chausseemeile 22826 6/10 Pariser Fuß, und eine österreichische Postmeile 23355 solche Fuß hat; es verhält sich also die baier. Chausseemeile zur österr. Postmeile, wie 22826 6/10 zu 23355 (§. 50, d.), oder 1 baier. Ch. M. : österr. P. M. = 22826 6/10 : 23355.

2) Bey einer geometrischen Proportion ist das Product der äusseren Glieder jenem der mittleren Glieder gleich (§. 55.), es sind also 23355 baier. Ch. M. =

22826 6/10 österr. P. Meil., d. h., 23355 b. Ch. M. geben 22826 6/10 östr. P. M., und umgekehrt 22826 6/10 östr. P. M. geben 23355 baier. Ch. Meilen.

3) Man setze nun Reesisch an: „Wieviel baier. Chausseemeilen geben 50 östr. Postmeilen, da 22826 6/10 östr. P. M. 23355 baier. Ch. Meilen geben:

b. Ch. M.	x	50 östr. P. Meilen
östr. P. M.	22826 6/10	23355 baier. Ch. Meilen

x = 51 35934/228266 b. Ch. Meilen.

Es geben also 50 östr. Postmeilen 51 35934/228266 baier. Chausseemeilen.

Probe:

Zur Probe kehre man die Aufgabe um, und setze an: „Wieviel östr. Postmeilen geben 51 35934/228266 b. Chausseemeilen, wenn 23355 solche Meilen 22826 6/10 östr. Postmeilen geben?

östr. P. M.	y	51 35934/228266 b. Ch. Meil.
b. Ch. M.	23355	22826 6/10 östr. P. M.

y = 50 östr. P. M.

Es geben daher 51 35934/228266 b. Chausseemeilen wieder 50 östr. Postmeilen.

Anmerkung: 1) Wie der hier bey der ersten Berechnung zum Vorscheine gekommene Bruch 35934/228266 durch Annäherung in einen anderen verwandelt werden könne, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind, ist im §. 20. schon gezeigt worden.

2) Bey der Probe nehme man den ersten Bruch, um genau wieder die vorhin da gewesene Größe zu erhalten; geschähe dieses nicht, so würde man ein Resultat erhalten, das mit dem vorigen aus dem Grunde nicht genau übereinstimmen könnte, weil der durch Annäherung gefundene Bruch dem ersten Bruche nicht nach aller Schärfe gleich ist.

II. Beyspiel:

Wieviel baier. Maß geben 40 württemberg. Maß Wein?

Auflösung:

a) Hat man solche Tabellen vor sich, wo die verschiedenen Getränkmaaße mit einem gemeinschaftlichen

Maaße z. B. mit französischen Duodecimal-Kubikzollen, oder mit Decilitres verglichen sind, so verfahre man hier, wie im vorigen Beyspiele.

b) Hat man aber solche Tabellen, wie man sie im III. Theile dieses Lehrbuches findet, wo die letzte Spalte anzeigt, wieviel z. B. zu 1000 baier. Maß württembergische Maß erfordert werden, so macht man die Auflösung dadurch, daß man ansetzt: „Wieviel baier. Maß geben 40 württemb. Maß, wenn $581\frac{92}{100}$ württemb. Maß 1000 baierische Maß geben?

baier. M.	x	40 württ. M.
württ. M.	$581\frac{92}{100}$	1000 baier. M.

$x = 68\frac{42944}{58192}$ baier. Maß.

Es geben also 40 württemb. Maß $68\frac{42944}{58192}$ baier. Maß.

Probe:

Man kehre zur Probe die Aufgabe um, und setze an: „Wieviel württemb. Maß geben $68\frac{42944}{58192}$ baier. Maß?

württ. M.	y	$68\frac{42944}{58192}$ baier. M.
baier. M.	1000	$581\frac{92}{100}$ württ. M.

es ist $y = 40$ württ. Maß.

$68\frac{42944}{58192}$ baier. Maß geben also wieder 40 württemb. Maß.

Anmerkung: Auf die nämliche Weise verfährt man, wenn man was immer für gegebene Maaße oder Gewichte auf solche reduciren soll, die an einem anderen Orte üblich sind.

§. 97.

III. Aufgabe, den Werth einer gewißen Waare im vaterländischen Maaße anzugeben, wenn derselbe nach dem ausländischen bekannt ist, und umgekehrt.

I. Beyspiel:

Wenn von einer gewißen Waare 1 württembergische Elle 1 fl. 24 kr. 4 Häller kostet, was kostet eine baierische Elle der nämlichen Waare?

Auflösung:

1) Anstatt 1 fl. 24 kr. 4 Häller schreibe man 84½ kr., da 1 fl. 24 kr. 4 Häller = 84½ kr.

2) Man setze nun Reesisch an: „Wieviel Kreutzer kostet 1 baier. Elle, wenn 1000 baier. Ellen 1356¹⁹⁄₁₀₀ württemb. Ellen geben, und wenn 1 württemberg. Elle der nämlichen Waare 84½ kr. kostet?

kr. x	1 baier. Elle.
baier. Ell. 1000	$1356\frac{19}{100}$ württ. Ell.
württ. Ell. 1	84½ kr.

daher ist $x = 114\frac{119611}{200000}$ kr.

Es kostet also unter dieser Bedingung eine baier. Elle der nämlichen Waare $114\frac{119611}{200000}$ kr. = 1 fl. 54 kr. und beynahe 4½ Häller.

Probe:

Zur Probe kehre man die Aufgabe um, und setze an: „Wieviel kostet 1 württemb. Elle, wenn $1346\frac{19}{100}$ württemb. Ellen 1000 baierische Ellen geben, und eine solche Elle $114\frac{119611}{200000}$ kr. kostet?

kr. y	1 württemb. Elle
württ. Ell. $1356\frac{19}{100}$	1000 baier. Ell.
baier Ell. 1	$114\frac{119611}{200000}$ kr.

daher ist y = 84½ kr.

Es kostet also unter dieser Bedingung eine württemb. Elle wieder 84½ kr. = 1 fl. 24 kr. 4 Häll.

II. Beyspiel:

Wieviel Gulden kosten 6 baierische Centner einer gewißen Waare, wenn im französischen Gewichte 100 Grammes der nämlichen Waare 1 Franc kosten?

Auflösung:

1) Wenn die Tabellen noch nicht unmittelbar ausweisen, wieviel baier. Pfund zu einer gewißen Summe von Grammes erfodert werden, dann bestimme man dieses allererst durch Hilfe der Proportion auf eine ähnliche Weise, wie es bey der Auflösung des I. Beyspieles des §. 96. geschehen ist.

Man findet in denjenigen Tabellen, die in diesem Lehrbuche in der II. Abtheilung des Anhanges des III. Theiles vorkommen, daß 1000 baierische Pfund 560000 Grammes, und umgekehrt 560000 Grammes 1000 baier. Pfund geben.

2) Nach der im I. Theile rücksichtlich der verschiedenen Münzen im §. 88. auf Seite 144 angeführten Tabelle beträgt 1 Franc in unserem Gelde 27 kr. 3 Pf. 3/4 Häller, weßhalb 1 Franc = 27 kr. 3 Pf. 3/4 Häller = 297/640 fl., und umgekehrt 297/640 fl. = 1 Franc.

3) Man setze nun Reesisch an: „Wieviel Gulden kosten 6 baier. Centner einer gewißen Waare, wenn 1 solcher Centner 100 baierische Pfund hat, 1000 solche Pfund 560000 Grammes geben, 100 Grammes 1 Franc kosten, und 1 Franc 297/640 fl. giebt?

Erster Ansatz:			Probe:		
fl.	x	6 b. Centn.	Fr.	y	100 Gr.
C.	1	100 b. Pf.	Gr.	560000	1000 b. Pf.
b. Pf.	1000	560000 Gr.	b. Pf.	100	1 Centn.
Gr.	100	1 Fr.	Centn.	6	1559 1/4 fl.
Fr.	1	297/640 fl.	fl.	297/640	1 Fr.

daher ist x = 1559 1/4 fl. — es ist y = 1 Franc

Es kosten also unter dieser Bedingung von der nämlichen Waare 6 Centner 1559 1/4 fl. = 1559 fl. 15 kr.; und zur Probe, wo die Aufgabe umgekehrt wurde, hat man gefunden, daß 100 Grammes 1 Franc kosten, wenn für 6 baier. Centner der nämlichen Waare 1559 fl. 15 kr. bezahlt werden.

Anmerkung: 1) Wie die Auflösung dieser Aufgaben in der Gestalt der Proportion geschehen müßte, ist aus dem Gesagten ohne eine weitere Anweisung ersichtlich.

Bey solchen Aufgaben ist die Verfahrungsweise mittels des Reesischen Kettensatzes viel einfacher und bequemer, als die nach dem gewöhnlichen Regeldetri-Ansatze.

2) Weil man bey diesen Aufgaben die Tabellen vor sich haben muß, und die Berechnung mittels der Decimalbrüche einfacher ist, so kann der Lehrer hierüber erst dann mehrere Beyspiele seinen Schülern vorlegen, wenn

dieselben den III. Theil dieses Werkes, wo die Decimalbrüche, und die benöthigten Tabellen vorkommen, in Handen haben, und zugleich mit den Decimalbrüchen zu rechnen wissen.

VII.

Zeit- und Rabattrechnung.

§. 98.

Zeitrechnung.

Wenn eine Summe Geldes nach und nach ohne Zins bezahlt werden soll, so lehret die Zeitrechnung die Zeit finden, in welcher das zu Leistende auf einmal bezahlt werden kann.

Die Zeitrechnungen geschehen nach folgender Regel:

a) Wenn die zu bezahlenden Posten, und die Differenzen der Termine gleich sind, so addirt man den ersten und letzten Termin, und dividirt dann die Summe mit 2, d. h., man sucht zum ersten und letzten Termine die mittlere arithmetische Proportionalzahl (§. 54.).

b) Sind die Zeiten zwischen den Terminen verschieden, oder die zu bezahlenden Posten nicht gleich groß, so wird ein jeder Posten mit seiner Zeit multiplicirt, diese Producte werden dann addirt, und ihre Summe mit der Summe aller Posten dividirt.

Beyspiele:

a) Petrus hat dem Paulus ohne eine Verzinsung 400 fl. binnen 4 Jahren, und zwar jedes Jahr 100 fl. zu bezahlen; zu welcher Zeit wird jener diese Summe auf einmal erlegen dürfen?

b) Zu welcher Zeit dürfen 600 fl. auf einmal bezahlt werden, wenn man sie unter der Bedingung

schuldet, daß 200 fl. nach einem Jahre, 200 fl. nach 3 Jahren, und 200 fl. nach 4 Jahren ohne eine Verzinsung zu bezahlen sind?

Auflösung:

a) Man addire nach der bey a aufgestellten Regel 1 Jahr zu 4 Jahren, und dividire die Summe 5 mit 2, man erhält $2\frac{1}{2}$, d. h., nach $2\frac{1}{2}$ Jahr sind diese 400 fl. auf einmal zu bezahlen.

Zur Probe darf man nur nach der einfachen geraden Regeldetri den Zins bestimmen, welchen Petrus von seinen 400 fl. bezieht, er mag sie innerhalb 4 Jahren nach und nach, oder er mag dieselben noch $2\frac{1}{2}$ Jahre auf einmal ablösen. Gesetzt, er habe dieses Geld einsweilen zu 5 Procenten (5 pro Ct.) am Zinse, so bekömmt er Interesse,

nach d. 1ten Jahr	= 20 fl.	nach d. 1ten Jahr	= 20 fl.
nach d. 2ten Jahr	= 15 fl.	nach d. 2ten Jahr	= 20 fl.
nach d. 3ten Jahr	= 10 fl.	nach ½ Jahr	= 10 fl.
nach d. 4ten Jahr	= 5 fl.		
Summe	= 50 fl.	Summe	= 50 fl.

b. 1) Nach der bey b gegebenen Vorschrift multiplicire man 200 mit 1, dann 200 mit 3, und endlich 200 mit 4, man erhält, daß $200 \times 1 = 200$, ferner $200 \times 3 = 600$, und $200 \times 4 = 800$.

2) Man addire diese 3 Producte, ihre Summe ist = 1600, und addire zugleich die 3 Posten, ihre Summe ist = 600.

3) Endlich dividire man 1600 mit 600, man erhält zum Quotienten die Zahl $2\frac{4}{6} = 2\frac{2}{3}$, d. h., in $2\frac{2}{3}$ Jahren sind unter dieser Bedingung die erwähnten 600 fl. auf einmal zu bezahlen.

Die Probe würde hier wieder, wie im vorigen Beyspiele, gemacht werden.

§. 99.

Abzugs- oder Rabatt-Rechnung.

a) Der Abzug, welchen die Gesetze einem Schuldner, der jetzt zahlet, was er erst nach einer gewißen Zeit zu zahlen schuldig ist, bewilligen, heißt der Rabatt, oder Interusurium, und dessen Berechnung die Abzugs- — Rabatt- oder Interusuriums-Rechnung.

b) Weder der Schuldner kann zur früheren Bezahlung mit Abzug des treffenden Rabatts gezwungen, und eben so wenig der Gläubiger zur Annahme dieser Bezahlung angehalten werden, indem allemal hierzu beyderseitige freye Einwilligung erfodert wird.

c) Nach dem rechtlichen Princip darf der Rabatt weder den Gläubiger, noch den Schuldner bevortheilen; man nimmt also an, die auf der Stelle erlegte Summe müsse so groß seyn, daß der Gläubiger durch sie nach landesüblichen Zinsen bis zum Zahlungstermine so viel erhält, als er zu fordern hat, und daß auf der anderen Seite der Rabatt nach eben den Zinsen dem Schuldner so viel abwirft, als er durch den Gebrauch des Kapitals bis zum Zahlungstermine erhalten würde.

d) Wenn die Zinse nicht wieder verzinset werden, und also, wie sich einige ausdrücken, nicht Zins auf Zins gerechnet wird, so geschieht, im Falle eine landesübliche Verzinsung zu 5 Procenten Statt findet, die Rabattrechnung nach folgenden Proportionen:

Die in einer gewißen Zeit verfällige Summe verhält sich zur baaren Zahlung

nach	1 Jahr	wie	105	zu	100
—	2 Jahren	—	110	—	100
—	3 Jahren	—	115	—	100
—	4 Jahren	—	120	—	100
—	5 Jahren	—	125	—	100
—	$\frac{1}{2}$ Jahr	—	$102\frac{1}{2}$	—	100
—	$\frac{1}{3}$ Jahr	—	$101\frac{2}{3}$	—	100
—	$\frac{1}{4}$ Jahr	—	$101\frac{1}{4}$	—	100 ꝛc.

e) Werden aber auch die Zinse als Kapital betrachtet, und von ihrer Zahlzeit an verzinset, so hat man eine Aufgabe der zusammengesetzten Zinsrechnung, die, im Falle die landesübliche Verzinsung zu 5 Proc. geschieht, und der Schuldner das Kapital bis zum Zahlungstermine unverzinslich zu genießen hat, ohne die Formel und die Logarithmen (§. 74. Anm. 3.) auf folgende mühsame Weise aufgelöst wird:

1) Man ziehe den Verticalstrich, und setze links die unbekannte auf der Stelle baar zu erlegende Summe, die man gewöhnlich mit x ausdrückt, und rechts hinüber schreibe man jene Summe, die nach der bestimmten Zeit zu zahlen ist.

2) Links setze man 105 so oft als Factor, als viele Jahre gegeben sind, und rechts hinüber jedesmal 100.

3) Endlich suche man nach §. 68. die unbekannte Größe x, man erhält dann jene Summe, die auf der Stelle baar zu erlegen ist.

Beyspiele:

I. Wieviel Gulden baar zu 5 Procent Rabatt machen 275 fl., welche erst nach 2 Jahren fällig sind?

II. Petrus hat nach 3 Jahren 1000 Gulden, die er während dieser Zeit unverzinslich genießt, zu bezahlen; welche Summe beträgt dieses Kapital, wenn es baar erlegt wird, und die landesübliche Verzinsung zu 5 Procenten Statt findet, während zugleich die fälligen Zinse jederzeit wieder verzinset werden?

Auflösung:

I. Weil bey der landesüblichen Verzinsung zu 5 Procenten anstatt 100 fl. nach 2 Jahren 110 fl. gleich baar zu erlegen sind, so mache man diesen Ansatz:

„Wel-

„Welche Summe ist gleich baar anstatt 275 fl. zu erlegen, wenn anstatt 100 fl. nach 2 Jahren gleich baar 110 zu erlegen sind?

baar fl.	x	275, die nach 2 Jahren ꝛc.
nach 2 Jahren ꝛc. fl.	110	100 fl. baar

es ist $x = 250$ fl.

Es sind also auf der Stelle baar 250 fl. zu erlegen, weßhalb der Abzug oder Rabatt 25 fl. beträgt.

Zur Probe bestimme man nach der zusammengesetzten geraden Regeldetri den Zins, den 275 fl. in 2 Jahren zu 5 Procenten geben, man findet 25 fl.; ferner 250 fl. + 25 fl. = 275, weßhalb die vorhin angestellte Berechnung richtig ist, im Falle, was bey dieser Aufgabe die Voraussetzung war, von keinen Zinseszinsen die Rede ist.

I. Zur Auflösung des II. Beyspieles setze man auf folgende Weise an:

baar fl.	x	1000 fl. nach 3 Jahr	
nach	105	100	baar
drey	105	100	baar
Jahr	105	100	baar

es ist $x = 863\,{}^{969625}/_{1157625}$ fl.

Es ist also auf der Stelle baar die Summe von $863\,{}^{969625}/_{1157625}$ fl., somit beynahe 863 fl. 50 kr. 3 hl. zu erlegen, weßhalb der Rabatt 136 fl. 9 kr. 5 hl. beträgt.

Zur Probe kehre man die Aufgabe um, und mache den Ansatz: „Zu welcher Summe erwachsen $863\,{}^{969625}/_{1157625}$ fl. zu 5 Procenten in 3 Jahren sammt den Zinseszinsen, wenn unter dieser Bedingung 100 fl. Kapital in einem Jahre zu einer Summe von 105 fl. anwachsen?" Hier muß 100 dreymal links, und eben so oft 105 rechts als Factor gesetzt wer-

den, weil bey dieser Aufgabe von 3 Jahren die Rede ist:

S.	fl.	y	863 969625/1157625 fl. K.	
Kap.	fl.	100	105	Summe
		100	105	
		100	105	

es ist wieder $y = 1000$

VIII.

Die Tausch- und Zehent-Rechnung, wie auch die Theilungs-Rechnung, und die Regula Falsi.

§. 100.

Tauschrechnungen.

Giebt man anstatt des baaren Geldes für eine eingekaufte Waare wieder eine Waare hin, und bezahlt man somit eine gewiße Schuld mit Waaren, so findet die so genannte Tauschrechnung Statt.

Dabey bestimmt man nach den bereits aufgestellten Regeln den Werth sowohl der hingegebenen, als der dafür empfangenen Waare, und subtrahirt den kleineren Werth von dem größeren, um aus dieser Differenz zu ermessen, was einer dem anderen, wie man sich ausdrückt, noch darauf zu bezahlen hat.

Beyspiel:

Man läßt bey einem Silberarbeiter etliche silberne Bestecke verfertigen, die zusammen 5 Mark 9 Loth $3\frac{1}{2}$ Quintl $= 89\frac{7}{8}$ Loth wägen, wovon das Loth 24 Batzen kostet.

Man giebt aber 33 Loth Bruchsilber daran, von welchem das Loth zu 17 Batzen angenommen wird; wieviel Gulden hat nun der Silberarbeiter noch zu fordern?

Auflösung:

1) Man berechne allererst, was $89\,^7/_8$ Loth kosten, wenn 1 Loth 24 Batzen kostet, und dann, was 33 Loth kosten, wenn 1 Loth 17 Batzen kostet:

b) fl.	x	$89\,^7/_8$ Loth	a) fl.	y	33 Loth
L.	1	24 Batzen	L.	1	17 Batzen
Batzen	15	1 fl.	Batzen	15	1 fl.
es ist $x = 143\,^4/_5$ fl.			es ist $y = 37\,^2/_5$ fl.		

2) Man subtrahire $37\,^2/_5$ fl. von $143\,^4/_5$, oder was eines ist, 37 fl. 24 kr. von 143 fl. 48 kr., man erhält zum Reste 106 fl. 24 kr., indem $143\,^4/_5 - 37\,^2/_5 = 106\,^2/_5$ fl., oder (143 fl. 48 kr.) — (37 fl. 24 kr.) = 106 fl. 24 kr., d. h., der Silberarbeiter hat noch 106 fl. 24 kr. zu fordern.

Wie hier die Probe gemacht werden muß, ist aus dem bereits Gesagten zureichend ersichtlich.

§. 101.

Zehentrechnung.

Der Zehent, d. h., der zehente Theil der auf dem Felde sich befindlichen Früchte wird öfters um eine gewißes Quantum von Früchten, oder auch für baare Bezahlung hingegeben; vorhin wird aber darüber ein Ueberschlag gemacht, und zwar nach dem allgemeinen Verhältnisse: „Der Zehent verhält sich zum ganzen Ertrage des Feldes, wie 1 zu 10.

Beyspiel:

Es sind 200 Jauchert mit Korn besäet, die Jauchert wird zu 600 Garben, und 12 Garben werden zu 1 Metzen gerechnet; es ist nun die Frage, wieviel Schäffel giebt dieser Zehent, und wie hoch beläuft sich derselbe im Gelde, wenn man das Schäffel im Durchschnitte zu 14 fl. 30 kr. rechnet?

A u f l ö s u n g:

a) Sch. x | 200 Jauch.
Jauch. 1 | 600 Garb.
Garb. 12 | 1 Metzen
Metzen 6 | 1 Schäff.
es ist x = 166 ⅔ Sch.

b) fl. y | 166 ⅔ Sch.
Sch. 1 | 14 ½ fl.
es ist y = 2416 ⅔ fl.

Es beträgt also der ganze Zehent 166⅔ Schäffel, und beläuft sich auf eine Summe von 2416⅔ fl.

In Betreff der Probe bedarf es keiner eigenen Anweisung mehr.

§. 102.

Die Theilungs-Rechnung und Regula Falsi.

Wenn man ein allgemeines Zahlenverhältniß durch bestimmte Zahlen ausdrückt, so heißt von den letzteren jene Zahl, die einsweilen zuerst, um nach dem gegebenen Verhältnisse die übrigen zu bestimmen, angenommen wird, willkührliche Zahl (Numerus falsus), und das Verfahren dabey nennt man die Regula Falsi, auch Theilungs-Rechnung, in so ferne nämlich auf diese Weise ein Ganzes in ungleiche Theile nach einem gewißen Verhältnisse getheilet wird.

B e y s p i e l e:

I. Unter 3 Personen sollen 1200 fl. so vertheilet werden, daß die Person B die Hälfte von A, und C dreymal soviel, als B bekommen soll.

II. In wieviel Jahren werden die Zinse oder Interessen eines Kapitals zu 5 Procenten der Hälfte des Kapitals gleich werden?

A u f l ö s u n g:

I. Man nehme an, A bekomme 2 fl., welche Zahl somit hier die willkührliche Zahl (Numerus falsus) ist; dann bekömmt B die Hälfte, daher 1 fl.

und C dreymal so viel, somit 3 fl.; die 3 gesuchten Antheile verhalten sich also jetzt, wie die Zahlen 2, dann 1, und 3, deßwegen geschieht die weitere Auf- Auflösung dieser Aufgaben nach der im §. 87. vorgetragenen Gesellschafts-Regel, kraft welcher zum Resultate gefunden wird, daß die Person A 400 fl., B 200 fl., und C 600 fl. bekömmt.

II. Man nehme die innerhalb x Jahren gefundenen Zinse = 1 an, welche Zahl somit hier die willkührliche Zahl (Numerus falsus) ist; dann ist das Kapital als das Duplum = 2, und man hat diese Aufgabe: „Wenn 100 fl. Kapital in einem Jahre 5 fl. Zins geben, wie viele Jahre müssen 2 fl. Kapital aufgelegt werden, damit sie 1 fl. Zins geben?“ Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht nach der im §. 76. aufgestellten Regel, kraft welcher zum Resultate 10 Jahre gefunden werden.

Anmerkung: 1) Die Auflösung solcher Aufgaben wird desto einfacher, je kleiner die angenommenen ganzen Zahlen sind: indessen muß man aber die Brüche, welche die Rechnung erschweren, bey den Verhältnißzahlen, so viel es möglich ist, vermeiden.

2) In der Buchstabenrechnung lassen sich diese Aufgaben öfters mittels der Gleichungen auf eine kürzere Weise auflösen.

§. 103.

Wiederholung in Fragen.

1) Was nennt man Gesellschafts-Rechnung, wodurch unterscheidet sich die einfache von der zusammengesetzten Gesellschaftsregel?

2) Welche Rechnungen werden Steuer- und Brand-Assecuranz-Rechnungen genannt; welche Regel kömmt dabey in Anwendung?

3) Welche Rechnungen gehören zur Alligations- oder Verbindungs-Regel, und bey welchen Aufgaben müssen die Reductionen niederer Einheiten auf höhere, und umgekehrt, vorgenommen werden?

4) Wodurch ist man in den Stand versetzet, den Werth einer gewißen Waare, der nach einem ausländischen Maaße oder Gewichte gegeben ist, im inländischen Maaße oder Gewichte zu bestimmen.

5) In welchen Fällen finden die so genannten Zeit- und Rabatt- oder Abzugs-Rechnungen Statt, und nach welcher Regel hat man dabey zu verfahren?

6) Welche Rechnungen werden Tausch- und Zehent-Rechnungen genannt, und was versteht man unter der Theilungs-Rechnung, und der so genannten Regula Falsi?

§. 104.

Beyspiele zur Uebung.

I.

Drey Kaufleute gewinnen zusammen 8000 fl. 40 kr.; A machte hierzu den Beytrag von 4000 fl. 20 kr., B von 6000 fl. 24 kr., und C von 1000 fl. 30 kr.; was trifft nun jedem seiner Einlage gemäß?

II.

Wieviel Salpeter, Schwefel und Kohlen muß man zu 7 Centner 50 Pfund Schießpulver nehmen?

III.

Welchen Beytrag hat Petrus zur Brand-Assecuranz-Kassa zu machen, wenn sein Gebäude in einem Werthe von 4000 fl. in der Brand-Assecuranz ist, und vom Hundert 4 kr., somit 4 kr. Procente zu bezahlen sind?

IV.

Drey Bauern haben mit einander nach dem Steuerfuße eine Abgabe von 120 fl. 40 kr. zu bezahlen; A giebt 50 fl. 30 kr. 4 Häller Steuer, B 60 fl. 24 kr., und C 80 fl. 36 kr. 3 Häller; was trifft nun jedem im Verhältnisse zu seiner Steuer?

V.

Wieviel baierische Maß hält ein Faß Wein, wenn es im württembergischen Maaße 30 Maß hält?

VI.

Petrus hat an seinen Bruder 1000 fl., und zwar ohne eine Verzinsung in jährlichen Fristen, somit in Zielern, jedesmal mit 200 fl. zu zahlen; nach wieviel Jahren dürfte er diese Summe auf einmal abführen?

VII.

Cajus schuldet 1200 fl., die er ohne Bezahlung eines Zinses nach 10 Jahren zu zahlen schuldig ist; welche Summe müßte er bey der landesüblichen Verzinsung zu 5 Procenten auf der Stelle bezahlen, um diese Schuld zu tilgen?

VIII.

Welchen Werth hat der Zehent eines Feldes von 100 Jauchert, wenn man annimmt, daß eine Jauchert 450 Garben giebt, 16 Garben einen Metzen geben, und daß das Schäffel im Durchschnitte zu 12 fl. 30 kr. gerechnet wird?

IX.

Was kosten 30 Ellen im baierischen Maaße, wenn eine Elle der nämlichen Waare im württembergischen Maaße 4 fl. 48 kr. kostet?

X.

Wieviel Gulden kosten 12 baierische Eimer zu 60 Maß, wenn im württembergischen Getränkmaaße ein Eimer des nämlichen Weines zu 160 Maß 120 fl. kostet?

XI.

Wieviel österreichische Postmeilen geben 36 baier. Chausseemeilen?

XII.

Der baier. Visiereimer zu 64 Maß hält 2752, und der baier. Schenkeimer zu 60 Maß 2580 baier. Decimal-Kubikzoll; wieviel baier. Duodecimal-Kubikzoll halten nun sowohl 6 baier. Visiereimer, als auch 8 baier. Schenkeimer?

XIII.

Vier Personen gewinnen mit einander 4780 fl. 30 kr; die Person A hat dazu auf 4 Monate 3000 fl., B auf 8 Mon. 8000 fl., C auf 9 Mon. 5000 fl., und D auf 1 Jahr 3000 fl. hergegeben; was trifft nun jeder dieser Personen?

XIV.

Vier Personen erben mit einander unter der Bedingung 33000 fl., daß die zweyte zweymal so viel, als die erste, die dritte dreymal so viel, als die zweyte, und die vierte Person viermal so viel als die dritte bekommen soll; wie groß ist nun der Antheil eines jeden Erben?

Anmerkung: Es könnten hier noch viele im gemeinen Leben vorkommende Rechnungsfälle angeführt werden, namentlich die Tara- und Fusti-Rechnungen, die Gewinn- und Verlust-Rechnungen, die Accis-, Cassier- und Factorey-Rechnungen, die Berechnung des Getraidpreises, und des daraus hervorgehenden Gewichtes des Brodes ꝛc. Ich halte es aber aus dem Grunde für überflüssig, dieselben ebenfalls vorzutragen, und dadurch diesem Buche einen grösseren Umfang zugeben, weil in Betreff der Aufgaben der Regeldetri schon so vieles gesagt wurde, daß man, im Falle die bisher gegebenen Regeln richtig aufgefaßt worden sind, bey der Auflösung anderer zur Regeldetri gehörigen Aufgaben in keiner Verlegenheit mehr seyn wird.

Rezension
aus dem literarischen Verkündiger
Nro. 6. Seite 41 — 44.

Mathematik.

Kempten 1812, gedruckt und im Verlage bey Dannheimer. Anleitung zur Begründung des Reesischen Ansatzes in der Lehre der geometrischen Proportionen, und zur Anwendung desselben auf die im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsfälle. Von Johann von Gott Bundschue, Professor der Mathematik und der Naturwissenschaften an dem kön. baier. Gymnasium zu Kempten. XII. und 205. S.

Für die Aufgaben aus der Lehre der geometrischen Proportionen dient die Regel-Detri als allgemeine Auflösungsmethode. Außer dieser giebt es zwey spezielle, die Ketten- und die reesische Rechnung, derer erste bey den Identitäts-, und derer zweyte bey den Kausalitäts-Verhältnissen ihre Anwendung findet; denn bey der Kettenrechnung werden einander gleiche Werthe, bey der reesischen aber Ursache und Wirkung gegenüber gesetzt. Das Charakteristische jeder der genannten drey Arten soll sich in den drey folgenden Ansätzen zeigen:

Beyspiel 1. Wie viel Gulden geben 15 Bthlr. wenn 5 Bthlr. 12 fl. geben?

2. Wie viel Zentner werden 6 Pferde ziehen, wenn 4 Pferde 30 Zentner ziehen?

I. Ansatz der Glieder beyder Aufgaben nach der Regel-Detri.

1) Weil die Bayerthaler und die Gulden, welche sie geben, im geraden Verhältnisse zueinander stehen; so kömmt x fl. auf eine, und 15 Bthlr. auf die andere Seite des Striches: daher

fl. x	
	15 Bthlr.

2) Weil die Pferde und die Anzahl von Zentnern, welche sie ziehen, im geraden Verhältnisse zu einander stehen; so

kömmt x Zentner auf die eine, und 6 Pferde auf die andere Seite des Striches; weßwegen

Ztr. x	
	6 Pferde

Anmerk. Den Fragezahlen hat man nur noch (wie bey dem reesischen Ansatze), die gleichbenannten Bedingungszahlen zu gegenüber setzen.

II. Ansatz der Glieder der ersten Aufgabe nach der Kettenregel:

Man setze den x fl. ihren Werth 15 Bthlr., diesen die gleichbenannte Zahl 5 Bthlr. und diesen ihren Werth 12 fl. gegenüber, oder man schreibe:

fl. x	15 Bthlr.
Bthlr. 5	12 fl.

III. Ansatz der Glieder des zweyten Beyspieles nach der reesischen Regel:

Weil die ziehenden Pferde Ursache und die von ihnen gezogenen Zentner Wirkung sind, so setze man x Ztr. auf eine, und 6 Pf. auf die andere Seite des Striches, oder man schreibe:

Ztr. x	
	6 Pf.

Rez. hofft, hiemit über den Unterschied dieser drey Rechnungsarten in Beziehung auf den Ansatz sich deutlich genug ausgedrückt zu haben; obwohl ihn das Schicksal eines frühern Versuches, die geeignete Anwendung sowohl der reesischen als der Kettenrechnung zu lehren, mißtrauisch machen könnte.

Die Kettenrechnung ist älter als die reesische: Graumann soll dieselbe (i. J. 1731) den Kaufleuten für ihre Wechsel-Rechnungen zuerst mitgetheilt haben. Man fand im Ansatze Schwierigkeiten, aber ohne Zweifel bloß deßwegen, weil man diese Rechnungsart auch auf die Kausalitäts-Verhältnisse, für welche sie nicht bestimmt war, anwenden wollte. Für eben diese stellte nun einige Jahre später Hr. v. Rees die geeignete Ansatzregel auf, nach welcher (nicht wie bey den Identitäts-Verhältnissen gleiche Namen und Werthe sondern) gleiche Ursachen und Wirkung einander gegenüber gestellt werden.

Rez. ist, des Kästnerschen Urtheiles ungeachtet, vollkommen überzeugt, daß diese zwey speziellen Rechnungsarten, jede innerhalb ihrer Gränzen, äußerst leicht, und bequemer als die allgemeine, die Regeldetri, seyen; deßwegen wünscht er auch sehr, daß Hr. Prof. Bundschue den reesischen Ansatz, welchen er lehren und ableiten wollte, besser untersucht haben möchte; gewiß würde er denselben dem Regeldetri-Ansatze, welchen er eigentlich unter dem Namen des reesischen lehrt, vorgezogen haben. Der Regeldetri-Ansatz ist ein Ansatz nach dem ge-

raden und verkehrten Verhältnisse; der reesische aber ein Ansatz nach Ursache und Wirkung; nun ordnet ja der Hr. Verf. ganz offenbar die Glieder nach der ersten und nicht nach der zweyten dieser Kategorien.

Die reesischen Worte „Ursache und Wirkung" tragen zur Sache Nichts bey, wenn sie, was hier unverkennbar der Fall ist, auf eine zwecklose Weise gebraucht sind. Man sage statt „Ursache oder Wirkung" „Größe oder Zahl"; es wird dadurch an der Bundschueschen Ansatzmethode Nichts geändert; ein Beweis, daß eben diese Worte ganz müssig dastehen.

Die Verschiedenheit des Verhältnisses und die Kausalität sind Begriffe, derer einer den andern in der Anwendung aufhebt; denn was man sich wie Ursache und Wirkung verbunden denkt, steht nothwendig im geraden Verhältnisse, weil die Wirkung desto größer seyn muß, je größer die Ursache ist. Es findet deßwegen nur die Wahl statt zwischen dem Ansatze nach der Art der Verhältnisse, und zwischen dem Ansatze nach Ursache und Wirkung. Rees wählte den letztern (unstreitig den vorzüglichern); beide in einem Akte vereinen zu wollen ist ein vergeblicher Versuch, den vor Hrn. Prof. Bundschue Niemand gemacht hat, so wie Niemand vor ihm Wirkungen kannte, die zu ihren Ursachen im verkehrten Verhältnisse stehen.

Möchten diese Bemerkungen allen, die den reesischen Ansatz mündlich oder schriftlich lehren, zur tiefern Untersuchung über das Wesen desselben Anlaß geben! — Die Kettenrechnung hat Hr. Verf. ganz richtig auf ihr Gebiet, die Reductionsfälle, angewandt, obwohl unter einem falschen Namen, und von dem glücklichen Irrthume geleitet, „daß bey diesen nur zwey Fragezahlen vorkommen." Es geht aus der Natur der einfachen und zusammengesetzten Verhältnisse hervor, daß in jeder Aufgabe eben so viele Frage- als Bedingungsglieder seyn müssen. Hrn. Prof. B. hat hierin der Schein und eine zu oberflächliche Ansicht der Sache irregeführt.

In einer Aufgabe, wie die folgende ist: Wie viele Franken geben 30 Krthl., wenn 10 Krthl. = 27 fl., 11 fl. = 24 Livr., 81 Livr. = 80 Fr. „zeigen sich beym ersten Anblicke nur die 2 Frageglieder" 30 Krthl. und x Fr. Doch deutlich gedacht ist die Aufgabe folgende: Wie viele Fr. geben 30 Stücke, derer 10 = 27 fl.; wenn 81 Stücke, derer 24 = 11 fl., 80 Fr. geben? Wobey die gleich große Anzahl von Frage- und Bedingungszahlen unverkennbar ist. Es ließen sich deßwegen auch die Reductionsfälle nach der Regel-Detri behandeln; allein viel leichter ergiebt sich der Ansatz nach gleichen Namen, und Werthen, der anwendbar ist, weil die zu reducirende Zahl zur unbekannten im geraden, die mit

ihr gleichnämige im ungeraden, und der Werth von dieser wieder im geraden Verhältnisse steht u. s. w.

Wäre es Hrn. Prof. B. darum zu thun gewesen, den Zusammenhang der Reductionsfälle mit seinem Thema durch Angabe ihres generischen Karakters zu zeigen, so würde er gewiß auf das nämliche Resultat, und auch zur Ueberzeugung gekommen seyn, daß es keiner eigenen Deduction dieses Ansatzes bedürfe.

Obwohl nun R. in Hinsicht der ersten 4 Abschnitte, in welchen der Regeldetri-Ansatz statt des reesischen, mit zu vieler Ausführlichkeit, wie es ihm scheint, gelehrt und begründet wird, aus diesem Grunde und einigen andern einer andern Meynung ist, so freut er sich doch zugleich, den Vortrag und die Anwendung der Kettenrechnung als vollkommen gelungen anrühmen zu können.

Der 6te Abschnitt, „Anwendung des reesischen Ansatzes auf einige practische Fälle“ überschrieben, mag auch Vielen willkommen seyn; allein für Gymnasialschüler ist derselbe zu practisch.

Uebrigens ist R. auch der Meynung, daß zwar die reesische und die Kettenrechnung in den Studienschulen gelehrt und eingeübt, und im Gymnasium aus der Proportionslehre in Kürze abgeleitet, aber doch lange nicht der Ausführlichkeit, mit welcher Hr. Prof. B. seinen Gegenstand behandelt, gewürdiget werden sollte.

Y...

Meine Rechtfertigung

in Absicht auf diese Rezension.

I.

a. 1) Unter **Regeldetri** (Regula de tribus terminis) versteht man überhaupt diejenige Regel, kraft welcher zu drey gegebenen Gliedern der Proportion das vierte gesucht wird; die Regeldetri ist demnach so alt, als die Proportionslehre selbst. Man durchgehe alle mathematischen Werke, die man nur immer zu Handen bekommen kann, und man wird finden, daß alle diejenigen, die diesen Gegenstand berühren, auch von der Regeldetri, wenn gleich nicht immer mit den nämlichen Ausdrücken, doch aber, was die Sache selbst betrifft, Erwähnung machen. Alle Aufgaben, bey welchen die vorkommenden Größen zu einander proportionirt sind, und somit mittels des Verhältnisses, das die bekannten Größen zu den

unbekannten haben, diese letzteren gefunden werden, sind Aufgaben der Regeldetri, man mag die Berechnuug auf diese oder jene Weise, durch diesen oder jenen Ansatz vornehmen.

2) In diesem Sinne nehme ich das Wort „Regeldetri“, wenn ich mich in der Vorrede meines Werkes äussere „Aus der vorliegenden Schrift wird man ersehen, daß es „sich vorzüglich um die Vortheile des Reesischen Ansatzes „streite, ob sie nämlich der Art seyen, daß bey practischen „Fällen, wo es nur um die schnelle Berechnung des durch „die Aufgabe gesuchten Resultates zu thun ist, die Reesi- „sche Verfahrungsweise den anderen Methoden, die rück- „sichtlich der Aufgaben der Regeldetri bekannt sind, vorzu- „ziehen seyen“; wie auch, wenn ich im §. 12. Seite 19. sage: „Der Reesische Ansatz wird nicht selten zur Auflö- „sung jener Aufgaben benützt werden, welche zur so ge- „nannten Regeldetri gehören.“

3) Herr Rezensent sagt also im Eingange seiner Rezension nichts neues, da er die Regeldetri als allgemeine Auflösungs-Methode für die Aufgaben der Regeldetri aus der Lehre der geometrischen Proportionen angiebt, und er scheint beym ersten Anblicke so ganz Unrecht nicht zu haben, wenn er vorgiebt, daß ich den Regeldetri-Ansatz, unter welchem als der allgemeinen Auflösungs-Methode seinem eigenen Geständnisse gemäß die Ketten- und die Reesische Rechnung als die zwey speciellen Rechnungen begriffen sind, gelehrt und begründet habe. Ganz natürlich ist es, daß ich anch von einem Vierecke rede, wenn ich die Lehrsätze über das Parallelogramm oder das Quadrat aufstelle, weil diese beiden Figuren Vierecke sind, und also unter dem allgemeinen Begriffe von einem Vierecke stehen. Es wird aber Niemand einfallen, mir sagen zu wollen, daß ich nun deßwegen, weil ich von Vierecken rede, das Parallelogramm oder das Quadrat nicht behandelt habe.

b. Doch aber Herr Rezensent will dadurch nicht bloß sagen, daß ich überhaupt einen Ansatz in Betreff der Regeldetri vortrage, er will mir vielmehr das Verdienst, den Reesischen Ansatz behandelt zu haben, gänzlich absprechen, indem ich von dem Wesen desselben den ächten Begriff nicht aufgefaßt, und also ganz etwas anderes gelehrt hätte.

Ist dieses Anschulden gegründet, so muß ich selbst meine Arbeit für mislungen ansehen, und gestehen, daß ich einen großen, ja den größten Fehler dadurch begangen habe, daß ich dem Publicum über den Reesischen Ansatz ein Werk von 14 gedruckten Bogen übergebe, ohne gewußt zu haben, worin das Eigenthümliche und Characteristische dieses Ansatzes bestehe.

Hr. Rez. sagt selbst: „Er sey vollkommen überzeugt, „daß diese zwey speciellen Rechnungsarten (die Reesische näm-

„lich, nnd die Kettenregel) äußerst leicht und bequemer, als „die allgemeine, die Regeldetri seyen“, wie auch: „die Ket„tenregel sey älter als die Reesische, indem jene schon früher „den Kaufleuten für ihre Wechselrechnungen sey mitgetheilt „worden. Man habe im Ansatze Schwierigkeiten gefunden, „Herr von Rees habe aber einige Jahre später die geeignete „Ansatz-Regel aufgestellet, nach welcher gleiche Ursachen „und Wirkungen einander gegenüber gestellt werden.“

Dadurch sagt nun Hr. Rez. abermal nichts neues. Hr. Prof. **Prändel** sagt hierüber in seiner Arithmetik in's Kurze gefaßt — München 1796 — auf Seite 92, und in seiner Arithmetik in engerer Bedeutung — München 1810 — auf Seite 158: „Die Reesische Regel hat ihren Namen von „dem Urheber desselben, dem Herrn v. Rees einem Hollän„der, der die bey den Kaufleuten übliche Kettenpraktik mit „einigen Veränderungen auch auf bürgerliche Rechnungen „anzuwenden wußte.“ Der nämliche Schriftsteller sagt in dem so eben angeführten ersten Werke auf Seite 102, und in dem zweyten auf Seite 170, da er vom Reesischen Ansatze redet, in wie ferne derselbe zur Auflösung der Aufgaben der Regeldetri benützt wird:

„Man muß in solchen Fällen immer auf **Ursache** und „**Wirkung** Rücksicht nehmen, und jene Sätze, die als „Ursache zusammen gehören, oder mit anderen Worten, die „Wirkung mit einander bestimmen helfen, nie von einan„der absondern.“

Ueberdieß habe ich aber auch nirgends in meiner Schrift (wenn es geschehen seyn sollte, so wolle Hr. Rez. die Seite und den §., um die Thatsache als richtig zu erweisen, genau angeben) gesagt, daß Hr. v. Rees die Kettenrechnung, die bey den Reductionen in Anwendung kömmt, erfunden habe. Ich sage ja im §. 11. Seite 18 nicht mehr und nicht weniger, als:

„Reesischer Ansatz wird jener Ansatz genannt, bey welchem „ein Product dem anderen anstatt des gewöhnlichen Gleich„heitszeichens durch den Verticalstrich gleich gesetzt wird &c.“ und dann auf Seite 19: „Die Benennung dieses Reesi„schen Ansatzes ist hergenommen von einem Holländer Na„mens de Rees.“

Nun kommen aber bey der Kettenregel ebenfalls geometrische Proportionen vor, bey welchen das Product der äusseren Glieder mittels Verticalstriches jenem der mittleren gleich gesetzt wird; ich konnte und mußte also in diesem Sinne auch die Kettenregel nach dem Reesischen Ansatze behandeln, und die Aufgaben derselben ebenfalls Aufgaben des Reesischen Ansatzes nennen.

Endlich geht aus der so eben angeführten Aeusserung des Hrn. Rez. hervor, daß er den **Reesischen Ansatz** für

vortheilhaft und bequem ansehe, und sich somit Hr. v. Nees durch Beseitigung einiger Schwierigkeiten im Ansatze Verdienste erworben habe.

Hat sich aber dieser im Ansatze, und nicht bloß durch Anwendung der Worte „Ursache und Wirkung" Verdienste erworben, so muß der Neesische Ansatz, als ein specieller Regeldetri-Ansatz, von dem gewöhnlichen Ansatze der Regeldetri im engeren Sinne, wo die Form der Proportion beybehalten wird, wesentlich verschieden seyn. Hr. Rezensent liefert aber in seinen beiden Ansätzen im Grunde nur einen und den nämlichen Ansatz, indem die Ausdrücke „weil die Pferde, „und die Zentner, die sie ziehen, im geraden Verhältnisse ste-„hen, so kömmt ꝛc.", ferner „weil die ziehenden Pferde die „Ursache, und die von ihnen gezogenen Zentner die Wirkung „sind, so ꝛc." im Ansatze selbst nichts ändern.

In den beiden Ansätzen des H. Rez., wovon der eine von ihm Regeldetri, und der andere Neesischer Ansatz genannt wird, wird immer ein Verticalstrich gezogen, oben links „Ztr. x", und unten rechts „6 Pf." hingeschrieben; es wird daher jedermann offenbar sehen, daß hier nicht von zwey verschiedenen Ansätzen, sondern von einem und dem nämlichen Ansatze die Rede ist, und ich somit eben dadurch den Neesischen Ansatz behandelte, daß ich nach dem Vorgeben des Hrn. Rezensenten, der entweder selbst nicht weiß, was Neesischer- und Regeldetri-Ansatz ist, oder absichtlich, um meine Schrift verdächtig zu machen, so inconsequent zu Werke geht, auf diese Weise den Regeldetri-Ansatz lehrte und begründete.

c. Wir wollen aber auch dem H. Rez. zugeben, das Wesentliche des Neesischen Ansatzes bestehe darin, daß er ein Ansatz nach Ursache und Wirkung sey, und deßhalb bey demselben die Kausalitäts-Verhältnisse ihre Anwendung finden; so ist eben dieses für die Richtigkeit meiner Ansicht, und die wirklich ausgeführte Begründung und Anwendung des Neesischen Ansatzes aus dem Grunde ein laut redender Beweis, weil auch ich in meinem Werke die Kausalitäts-Verhältnisse zum Grunde gelegt habe.

Im §. 18. S. 24. stellte ich die Begriffe von Ursache und Wirkung auf, und sagte dann, daß in dem angegebenen Sinne die im §. 14. S. 21. angeführten Bestimmungs- oder bestimmende Größen passend Ursachen, und die denselben entsprechenden, durch sie bestimmten Größen Wirkungen genannt werden können. Im §. 26. S. 34. sage ich:

„Weil die Bestimmungsgrößen als Ursachen, und die „bestimmten Größen als Wirkungen betrachtet werden „können, so nehme man abermal von Causa und Effectus „die Anfangsbuchstaben ꝛc."

Man lese die in dem §. 21. S. 28, §. 27. S. 36, §. 31.

S. 44 u. 45, §. 34. S. 45 rc. vorkommenden Regeln, und man wird durchgehends finden, daß ich für meinen Ansatz immer das Nämliche sage, was H. Rez. für den von ihm aufgestellten Ansatz sagt, welcher seinem Vorgeben gemäß der ächt Reesische Ansatz seyn soll.

Zum Belege hievon will ich von diesen Regeln nur eine anführen, die man dann mit der beym III. Ansatze vom H. Rez. angegebenen Reesischen Regel vergleichen wolle; ich sage nämlich im §. 20. S. 27:

„1) man mache den Verticalstrich, und setze links die unbekannte Größe e oder x; 2) rechts hinüber setze man „die bekannte Wirkung E; 3) links unter x setze man die „bekannte Ursache C, welche die bekannte Wirkung E „giebt; 4) rechts hinüber die mit C gleichnamige Wirkung „c, nach der im §. 19. aufgestellten Formel“:

e ?	E	oder	x ?	E
C	c		C	c

Hr. Rez. aber, wie ich es schon bemerkte, sagt: „Weil „die ziehenden Pferde die Ursache, und die gezogenen Zentner „die Wirkung sind, so setze man x Ztr. (nach meiner Formel „e oder x) auf eine, und 6 Pf. (nach meiner Formel c) auf „die andere Seite des Striches.“ Diese beiden Ansätze (mein Rees. Ansatz nämlich, und der Rees. Ansatz des H. Rez.) sind mit einander so gleichlautend, daß man eher glauben muß, H. Rez. habe beym Ansatze seines Beyspieles die von ihm so genannte Bundschuesche Ansatz-Methode zur Norm genommen, als daß man auf die Behauptung kommen kann, H. Rez. habe sein Beyspiel, und nicht ich meine Formeln und Beyspiele ächt Reesisch angesetzt.

d. In allen Schriften, die ich in Betreff des Reesischen Ansatzes las (und derer habe ich doch, wie H. Rez. gleich sehen wird, mehrere gelesen), fand ich als das Characteristische desjenigen Ansatzes, der Reesischer Ansatz genannt wird, dieses, daß immer die geometrische Proportion gleich unmittelbar in der Gestalt der Gleichung dargestellet, und das Product der äussern Glieder derselben auf die eine, und jenes der mittleren auf die andere Seite geschrieben wird. Wenn ich recht gesehen habe, so hat H. Rez. bey seinem Rees. Ansatze diese nämliche Form beobachtet. Ich nenne daher im §. 11. S. 18. vom Namen des Hrn. v. Rees eines Holländers jenen Ansatz den Reesischen Ansatz, wo mittels des Verticalstriches das Product der äusseren Glieder der geometrischen Proportion jenem der mittleren gleich gesetzt, und auf diese Weise nach den Gesetzen der Gleichung das unbekannte Glied gesucht wird.

Daß ich vom Reesischen Ansatze eine schiefe Ansicht haben könn-

könnte, und das Eigenthümliche desselben nicht wissen sollte, wäre wohl gedenkbar, daß aber alle diejenigen Mathematiker, die ich nun gleich namentlich aufführen werde, nicht wissen sollten, was der Reesische Ansatz ist, und dagegen der superweise Herr Rezensent allein den ächten Begriff von demselben habe, wird gewiß Niemand glauben. Um deswillen sind die nachstehenden Auszüge, die ich aus verschiedenen mathematischen Werken anführe, ein neuer unumstößlicher Beweis, daß ich in meiner Schrift den Reesischen Ansatz wirklich gelehret und begründet habe.

1) Der Herr geistliche Rath und Professor Magold sagt im I. Theile seines vortrefflichen mathematischen Lehrbuches — zweyte vermehrte Ausgabe 1808, III. Zusatz des §. 275:

„Verwandelt man eine gegebene Aufgabe nach dieser Formel (eCT = Ect) in weiterer Bedeutung in eine Gleichung, setzet zwischen die gleichen Producte einen Verticalstrich, und suchet den Werth der unbekannten Größe, so heißt diese Auflösungs-Methode die Reesische Regel, von einem Holländer de Rees, also genannt.“

2) Der königl. württembergische Herr Ober-Regierungs-Rath C. L. Schübler, welcher durch seine umfassenden und gründlichen mathematischen Kenntnisse rühmlichst bekannt ist, und zu Heilbronn im Jahre 1795 eine Schrift unter dem Titel herausgab: „C. L. Schüblers Anleitung zur Reesischen Rechnung, oder überzeugende Gründe der Rechenkunst, insbesondere der Reesischen Methode ꝛc.“ sagt in diesem Werke im §. 81. Seite 229 ꝛc.:

„Man hat die verticale oder Säulen-Stellung, die Glieder nämlich aus Proportionen herauszuheben, und sie vertical zusammen zu ordnen, mit der besondern Benennung beehrt, sie den Reesischen Ketten-Satz zu heißen; hat auch die Vorschriften, Zahlen, welche sich zerfällen lassen, in den kleinsten Verhältnißgrößen in das Product einzuschreiben, die Reesische Regel genannt. Ein Holländer, Hr. v. Rees, hatte in einem Rechenbuche mit vielen Beyspielen Belehrungen gegeben, wie die Größen, welche in den Dividend, und die, welche in den Divisor gehören, zusammen zusetzen, und wie alsdann durch Hebungen der Quotient am bequemsten zu finden wäre. Das Buch kam in der ersten Hälfte unsers Jahrhunderts in holländ. Sprache heraus, und wurde hierauf in's Deutsche übersetzt.“

Unter anderen Beyspielen kömmt in diesem Werke im §. 94. Seite 276. das Beyspiel vor:

„Einer hat 22 1/2 Reichsthaler Auslagen für 1 Centner Waaren; er verkauft die Waare einzeln, und giebt jedes Pfund für 24 kr.: wieviel hat er Procente gewonnen, da

„ihm der ganze Centner für den letztgedachten Preis ab„gieng." Der Herr Ober-Regierungs-Rath sagt dann auf Seite 278: „„Nach der Reesischen Methode „„hätte man, wie folgt, geschrieben"":

	100 Rthl.
Rthl. 45/2	100 Pf.
Pf. 1	24 fr.
fr. 90	1 Rthl.

3) In Vega's Arithmetik und Algebra findet man die Regeln des Reesischen Ansatzes in gedrängter Kürze dargestellt, und dann im §. 205. ein Beyspiel der zusammengesetzten Regeldetri dadurch nach denselben aufgelöst, daß ein Verticalstrich gezogen, das Product der äusseren Glieder der zusammengesetzten Proportion links, und das der mittleren Glieder rechts gesetzt wurde. Am Ende findet man von diesem berühmten mathematischen Schriftsteller die Bemerkung beygefügt:

„Diese gegebene Auflösung der zusammengesetzten Re„geldetri, wodurch nun alle vorgelegten Rechnungsfragen „(von §. 200 bis 204) sehr geschwind und leicht zu beant„worten sind, ist dem Wesentlichen nach die so genannte „Reesische Regel, welche in manchen Büchern auf „verschiedene Arten vorgetragen wird."

4) Herr Professor D. Clemm sagt in seinem mathematischen Lehrbuche — Stuttgardt bey Mezler 1777 — im §. 381. S. 152:

„Diese Reesische Regel ist folgende: wenn man eine Ver„ticallinie zieht, und sie unten durch eine horizontale ab„schneidet, hernach die gegebenen Glieder auf beiden Sei„ten der Verticallinie so setzet, daß beiderseits einerley „Namen zu stehen kommen, so sind die Producte der Glie„der auf beiden Seiten gleich, und das unbekannte wird „gefunden, wenn man durch seinen Coefficienten das Pro„duct auf der andern Seite dividirt."

5) Herr Pfarrer Xav. Angerer zu Tafertshofen gab als Professor der Mathematik an der vormaligen Universität zu Dillingen im Jahre 1804 bey Leon. Brönner eine Anleitung zur Reesischen Rechnung heraus, wo er im Vorberichte sagt:

„Die Reesische Rechnung ist nichts anders, als eine vor„theilhafte Anwendung der Lehre über die Bearbeitung „der Brüche und Gleichungen, und zwar vorzüglich der „Proportionen."

Derselbe zieht dann bey der Auflösung der angeführten Aufgaben immerhin einen Verticalstrich, setzet links das Product der äusseren Glieder, unter welchen jederzeit die unbekannte

Größe ist, und rechts das Product der mittleren Glieder der einfachen oder zusammengesetzten Proportion.

6) Herr Professor Weigl sagt in seinem Lehrbuche der Arithmetik und Algebra — Sulzbach im Verlage der Seidelschen Buchhandlung 1812 — im §. 409. S. 484:

„Die Reesische Regel, deren Erfindung dem Herrn von „Rees, einem Holländer, zugeschrieben wird, ist eine aus „den Gliedern einer Proportion gebildete Gleichung; die „Stelle des Gleichheits-Zeichens (=) vertritt ein senk„rechter Strich, welcher die beiden Seiten der Gleichung „trennt."

7) Herr Schmalzried sagt in seiner vollständigen Anleitung zur Reesischen Rechnung — fünfte Auflage Stuttgart bey Metzler 1803:

„Wenn zwey geometrische Verhältnisse, welche gleiche Be„nennung haben, zusammen kommen, so bekommt man „aus solchen eine geometrische Proportion. Daher ist klar, „daß die Reesische Regel sowohl auf den einfachen als geo„metrischen Proportionen beruhe. — Wie viel Kreutzer „gelten 19 Ellen, wenn 2 Ellen 3 kr. gelten?

„kr. | 19 Ell.
„Ell. 2 | 3 kr. } $2 : 19 = 3 : x$

„Jetzt darf ich nur 19 und 3 als mittlere Glieder multi„pliciren, und mit 2 dividiren, so zeigt sich das 4te Glied, „nämlich die Kreutzer, so ich begehrt habe."

Herr Schmalzried setzt also offenbar das Characteristische des Reesischen Ansatzes auch in dieses, daß in der Gestalt der Säulenstellung durch den Verticalstrich das Product der äusseren Glieder der Proportion jenem der mittleren gleich gesetzt wird.

8) Herr Professor Brändel sagt in seinem Lehrbuche — die Rechenkunst, besonders die Reesische Regel, Amberg 1812 — in Betreff des Reesischen Ansatzes im §. 116. S. 139. Folgendes:

„Herr von Rees ein Holländer suchte dieser Methode, Pro„portionen anzusetzen, eine bequemere Wendung zu geben, „indem er die Bruchform so stellte, daß der Querstrich in „einen Senkstrich umgeschaffen wurde, und die Factoren „des Zählers zur Rechten desselben, folglich der Nenner „oder der Divisor zur Linken zu stehen kam."

II.

a) An meinem Ansatze wäre vieles geändert worden, wenn ich anstatt der Worte „Ursache und Wirkung" die Worte „Größe oder Zahl" gewählt hätte. H. Rez., der diese Worte Reesische Worte nennt, weil nämlich nach seiner Aeusserung die Reesische Rechnung bey den Kausalitäts-Verhältnissen ihre Anwendung findet, muß es ganz

vergessen haben, daß ich eine Anleitung zur Begründung des Reesischen Ansatzes liefern wollte, und mich also auch der Reesischen Worte bedienen mußte.

b) Weder zwecklos sind diese Worte von mir gebraucht, noch stehen sie ganz müssig da. Sage ich anstatt „Ursache oder Wirkung" Größe oder Zahl überhaupt, so mache ich zwischen den bestimmenden und den bestimmten Größen keinen Unterschied mehr. Berechne ich z. B. für die nämliche Zeit, und die nämlichen Procente die Größe des Zinses, so ist das Kapital die bestimmende, und der Zins die bestimmte Größe; die Größe des Kapitals bestimmt und bewirkt in diesem Falle die Größe des Zinses, weßhalb dieser die durch das Kapital bestimmte und bewirkte Größe ist. Ich mußte also, weil es nach dem Vorgeben des Hrn. Rez. Herr v. Rees selbst so machte, und ich über den Reesischen Ansatz eine Abhandlung liefern wollte, das hier obwaltende Kausalitäts-Verhältniß durch die Reesischen Worte „Ursache und Wirkung" bezeichnen.

III.

Daß jede Ursache mit ihrer Wirkung in dem Sinne, wie ich die Worte „Ursache und Wirkung" nehme, im geraden Verhältnisse stehe, und vor mir Niemand Ursachen gekannt habe, die mit ihren Wirkungen im umgekehrten Verhältnisse stehen, ist eine ganz unrichtige Aussage des H. Rezensenten.

Im §. 18. S. 24. sage ich: „Nimmt man das Wort „„Ursache (Causa)"" im weiter ausgedehnten Sinne, nämlich für alles dasjenige, aus dem man erkennt, daß ein „Ding gerade so groß sey, als es wirklich ist, oder warum es „gerade diese, und keine andere bestimmte Größe habe, und „das Wort „„Wirkung (Effectus)"" für dasjenige, dessen „Größe durch das erstere bestimmt wird, so können die im „§. 14. angeführten Bestimmungsgrößen passend Ursachen, „und die denselben entsprechenden durch sie bestimmten Größen Wirkungen genannt werden."

Das größere Kapital giebt bey den nämlichen Procenten in einer kürzeren Zeit den nämlichen Zins, mit der Zunahme des Kapitals ist also hier die Abnahme der Zeit verbunden, und der Grund, warum in dieser Voraussetzung die Zeit gerade so groß seyn muß, liegt im Kapitale; das Kapital ist demnach in Absicht auf die Zeit der Bestimmungsgrund, woraus die Größe derselben erkannt werden muß, und die Zeit ist die durch das Kapital bestimmte, und damit im umgekehrten Verhältnisse stehende Größe. Es ist überflüssig, hierüber mehrere Beyspiele anzuführen, die Sache ist ist so evident, daß Jedermann offenbar einsieht, es gebe wirklich Dinge, die mit einander in einer solchen wechselseitigen

Verbindung stehen, und sich so bestimmen, daß, wie das eine zunimmt, das andere im nämlichen Verhältnisse abnehmen müsse, und somit die bestimmenden und bestimmten Größen in dem von mir vorhin bestimmten und ausdrücklich angegebenen Sinne Ursachen und Wirkungen genannt werden können.

Herr Professor Doctor Jakob von Zallinger sagt in seinem Werke: „Interpretatio naturae, seu philosophia newtoniana methodo exposita &c. Tom. II. complect. principia mechanicae terrestris et coelestis Sect. I. Cap. II. §. VI. pag. 8. *Definitio* II.“:

„Quando in Mechanica ratio causarum, et effectuum „determinari dicitur, vox causa latius sumitur, nempe „pro omni eo, ex quo intelligitur, cur aliquid sit tan„tum, quantum est, non majus, aut minus, sive cur „hanc, et non aliam magnitudinis rationem habeat. Pa„riter effectus censetur, cujus magnitudo ab altero, „nempe a causa, vel mensura pendet, ac determinatur.“ Deinde §. VIII. pag. 9. *Definitio* IV.: „Causae agen„tes in ratione directa sunt, quibus crescentibus „effectus crescit, decrescentibus decrescit: causae agen„tes in ratione reciproca, quibus crescentibus ef„fectus decrescit, decrescentibus crescit. — Pondus cur„rui impositum, et longitudo viae, qua transferendus est „currus, sunt causae agentes in ratione reci„proca; nam quo majus est pondus impositum, aut „quo major conficienda est via, eo minor ac difficilior „est currus tranlatio.“

Es hat also doch Jemand vor mir Ursachen gekannt, die in dem von mir ausdrücklich angegebenen Sinne mit ihren Wirkungen im umgekehrten Verhältnisse stehen, und Herr Rez., der dadurch seine literarische Unkunde nicht wenig zu erkennen giebt, sagt, es habe vor mir Niemand solche Ursachen und Wirkungen gekannt.

IV.

Herr Rezensent sagt ferner, es finde nur die Wahl Statt, zwischen dem Ansatze nach der Art der Verhältnisse, und zwischen dem Ansatze nach Ursache und Wirkung, und ich behaupte dagegen, daß es immer eines sey, ob ich sage „bestimmende und bestimmte Größen, die zusammen im geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen“, oder ob ich sage „Ursachen und Wirkungen, die zusammen im geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehen“; was die Größen selbst betrifft, so ist es, indem nur die Benennungen verschieden sind, immer eine und die nämliche Sache, ich mag mich auf diese oder jene Weise ausdrücken. Es müssen in dem einen, wie in dem anderen Falle immerhin solche Größen vorhanden seyn, wo eine die

andere bestimmt, und somit mittels der angestellten Vergleichung eine durch die andere gefunden werden kann.

Es war also von mir kein vergeblicher Versuch, daß ich beides in einem Acte vereinigte. Wenn vor mir dieses Niemand, wie H. Rez. sagt, gethan hat, so gereicht mir es zu keiner Unehre, und beweist vielmehr, daß ich in diesem Betrachte einige neue Ansichten gefaßt habe, und somit nach dem Zeugnisse des H. Rez. auf Originalität Anspruch machen dürfe.

V.

Ganz richtig hätte ich, sagt H. Rez., die Kettenregel auf die Reductionsfälle angewandt, und der Vortrag und die Anwendung derselben wird von ihm als vollkommen gelungen angerühmt.

Dieses wäre einmal etwas Gutes, und für mich äusserst Schmeichelhaftes, wofür ich dem Hrn. Rez. sehr verbunden seyn müßte, wenn er nicht auch zugleich sagen würde, daß ich bey dieser nämlichen Kettenrechnung unter einem falschen Namen, und von einem glücklichen Irrthume geleitet worden sey, und mich hierin der Schein, und eine zu oberflächliche Ansicht der Sache irregeführt habe.

Hr. Rez. muß vermuthlich wissen, daß es beym Rezensiren üblich seyn solle, die Werke auch von der guten Seite darzustellen. Er wollte also auch, da er sichs einmal vorgenommen hatte, an meiner Schrift nichts Lobenswürdiges aufzudecken, doch wenigstens den Schein eines unbefangenen Beurtheilers haben, und somit mein Werk mit einigen scheinbaren Lobsprüchen beehren.

Ich lasse es anheim gestellet, ob man von einem Schriftsteller noch sagen könne, daß seine Arbeit vollkommon gelungen sey, wenn er vom Scheine und Irrthume geleitet, und von einer zu oberflächlichen Ansicht irregeführet dieselbe geliefert hat, und begnüge mich damit, daß ich abermal die Grundlosigkeit einer Aussage des H. Rez. zeige.

Mein Irrthum besteht nach der Aussage desselben darin, daß ich der Meinung seyn soll, bey den Reductionsfällen kommen nur zwey Fragezahlen vor.

Man durchlese beym §. 47. S. 77. angefangen bis zum §. 73. die Abhandlung über die Reductionen, und man wird finden, daß bey Aufstellung der Formeln, und den angeführten Beyspielen gleichviel Frage- und Bedingungszahlen vorkommen, und ich somit nie in diesem Irrthume könne gewesen seyn. Zum Belege hievon will ich nur eine Formel und ein Beyspiel anführen, welche im §. 58. S. 88, und im §. 60. S. 93. vorkommen:

„Wie viele niedere Einheiten geben a höhere Einheiten,

„wenn eine von diesen b niedere Einheiten, eine von die„sen c niedere Einheiten, und eine von diesen d niedere „Einheiten giebt, welche mit den gesuchten Einheiten „gleichnamig sind?“ Ferner: „Wie viel Häller geben 24 „baier. Mard'ors, wenn 3 von diesen 22 fl. geben, 1 fl. 60 kr., „und 1 kr. 8 Häller hat.“

Wenn man nun dieses Beyspiel mit jenem vergleicht, welches Herr Rez. in Absicht auf die Kettenregel anführt, so wird man offenbar sehen, daß ich eben so deutlich, wie H. Rezensent, gedacht habe, und bey meinen Formeln und Beyspielen keineswegs nur zwey Fragezahlen vorkommen.

Freylich sage ich im §. 59. S. 90.: „Hier bedarf es kei„nes Vorbereitungsansatzes, indem die ganze Aufgabe in „zwey Fragegliedern — einem bekannten und unbekannten „besteht, nämlich: wie viel niedere Einheiten bestimmter Art „geben die vorliegenden höheren Einheiten?“ Sieht nun H. Rez. nicht, ich sage es doch so deutlich, daß hier vom Vorbereitungsansatze, und nicht von dem zur wirklichen Berechnung benöthigten Ansatze die Rede ist? Nun verstehe ich aber im §. 19. S. 26. unter dem Vorbereitungsansatze denjenigen, den man sich vorläufig macht, um die Aufgabe in gedrängter Kürze vor sich zu haben, und sie mit einem Blicke übersehen zu können. Es ist genug, wenn ich dem Gymnasialschüler z. B. sage „wie viel Häller geben 24 baier. Mard'ors“, weil er dann schon weiß, daß 3 Mard'ors 22 fl. ꝛc. geben.

VI.

Endlich will H. Rezensent, weil ich seinem Vorgeben gemäß in Absicht auf die Reductionsfälle unnöthiger Weise einen eigenen Ansatz deducirte, und überhaupt die Sache zu ausführlich und zu practisch darstellte, meinem Buche die Brauchbarkeit beym Gymnasialunterrichte absprechen.

Ich könnte in Betreff dieser letzten vom H. Rez. gegen mein Werk geführten Beschwerde aus mehreren Gründen darthun, daß ich bey Verfassung dieser Schrift den Hauptzweck des mathematischen Gymnasialunterrichtes, die geistigen Anlagen der Schüler zu entwickeln, und sie an ein wissenschaftliches Denken zu gewöhnen, immerhin vor Augen gehabt habe, indem ich jederzeit die Gründe des Verfahrens angebe, und die Richtigkeit und allgemeine Giltigkeit der aufgestellten Regeln beweise, während zugleich die Auflösung der wichtigsten, und immerhin vorkommenden Rechnungsaufgaben gezeigt wird.

Ueberdieß darf ich mich, was die Brauchbarkeit meiner Schrift betrifft, auf das Urtheil des unbefangenen, und sachverständigen Publicums berufen; ich weiß gewiß, dasselbe wird mit mir die Ueberzeugung theilen, daß beym Unter-

richte in der Mathematik die Sache in jeder Hinsicht gründlich, und deutlich, und daher auch ausführlich abgehandelt werden müsse. Die einzelnen mathematischen Zweige stehen mit einander in einer solchen engen Verbindung, daß der Schüler schlechterdings in dieser Wissenschaft keine Fortschritte machen kann, wenn der Lehrer flüchtig über die Sache hingeht, und bey einem jeden Theile nicht so lange verweilet, bis der Schüler das Vorgetragene ganz aufgefaßt hat.

Weil ich mich aber in Absicht auf diesen Punct schon in der Vorrede meines Werkes erklärte, so will ich hierüber nichts weiteres mehr sagen, es möchte sonst dem H. Rezensenten, der ein Feind einer jeden zu großen Ausführlichkeit ist, auch diese Rechtfertigung zu practisch, und zu ausführlich werden.

Um für meine Sache nicht allein das Wort zu führen, so füge ich zugleich jene Rezension bey, die während dieses Jahres über meine Schrift im allgemeinen Kammeral-Korrespondenten erschienen ist.

Kempten im Februar 1813.

Professor Bundschue.

Rezension

aus dem allgemeinen Kammmeral-Korrespondenten.

Erlangen — Nro. 10. — den 23. Jäner 1813.

Von dem Professor der Mathematik am königl. baier. Gymnasium zu Kempten, Herrn Johann von Gott Bundschue erschien eine

„Anleitung zur Begründung des Reesischen Ansatzes
„und dessen Anwendung auf die im gemeinen Leben
„vorkommenden Rechnungsfälle. Kempten 1812, bey
„Dannheimer, 8. 105 S. ausser der Vorrede.
„Preis 45 kr.“

Streng methodische Begründung durch die allgemeine Arithmetik, dieses bisher meist nur technisch behandelten Zweiges der besonderen, Bestimmtheit und Klarheit des Vortrages, Zweckmäßigkeit der Aufgaben, eine lichtvolle Anordnung aller Theile, und manche eigene neue Ansichten zeichnen die gelungene Schrift aus, und machen sie allgemeiner Empfehlung zum Schul- und Privatgebrauch im hohen Grade würdig.

M.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bundschue, Johann von Gott, 1784-1851

Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte

Bd.: 2

Kempten 1813

Bibl.Mont. 3651-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10723355-6